

מבחן בסיבוכיות

23.01.2014 מועד א' סמסטר א' 2013-2014

מרצה: פרופ' מולי ספרא

מתרגל: גיל תמיר

זמן המבחן: 3 שעות.

במבחן זה ישנם שלושה חלקים.

- בחלק הראשון 8 שאלות, כל אחת שווה 5 נקודות. סה"כ חלק זה שווה 40 נקודות.
- בחלק השני 4 שאלות, כל אחת שווה 10 נקודות. סה"כ חלק זה שווה 40 נקודות.
- בחלק השלישי 2 שאלות, כל אחת שווה 10 נקודות. סה"כ חלק זה שווה 20 נקודות. (שימו לב להנחיות נוספות לגבי הניקוד בתחילת החלק השלישי)

הציון המקסימלי האפשרי בבחינה כולה הוא 100.

בכל שאלה יש לכתוב תשובה נכונה, בהתאם להנחיות השאלה.

במבחן ניתן להשתמש, אלא אם כן מצוין אחרת, בכל המשפטים שהוכחו בכיתה, ובפרט בחסמים הבאים על משתנים מקריים:

מרקוב: $\Pr_x[f(x) \geq k] \leq \frac{E_x[f(x)]}{k}$, כאשר $k \geq 0$ ולכל x , $f(x) \geq 0$.

צ'בישב: $\Pr_x[|f(x) - E_y[f(y)]| \geq k] \leq \frac{\text{Var}_x[f(x)]}{k^2}$.

צ'רנוף: $\Pr[\sum_i X_i > (1 + \delta) \cdot E[\sum_i X_i]] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{E[\sum_i X_i]}$, כאשר $X_i \in [0,1]$ מ"מ ב"ת.

כמו כן ניתן להשתמש במשפט שלכל מספר טבעי $m \in \mathbb{N}$, קיים שדה $G[2^m]$ בגודל 2^m .

בהצלחה!

חלק ראשון

בחלק זה 8 שאלות. כל שאלה שווה 5 נקודות. סה"כ חלק זה שווה 40 נקודות.

שאלה 1:

ההפרש הסימטרי של שפות L_1, L_2 מוגדר ע"י:

$$L_1 \Delta L_2 = (L_1 \setminus L_2) \cup (L_2 \setminus L_1)$$

נאמר שמחלקה C סגורה תחת הפרש סימטרי אם"ם $L_1, L_2 \in C \Leftrightarrow L_1 \Delta L_2 \in C$.

נתון ש NP אינה סגורה תחת הפרש סימטרי.

איזו טענה נובעת?

רשמו את מספר התשובה בעלת המספר הנמוך ביותר מבין האפשריות:

שאלה 2:

נגדיר את השפה $4NAE$:

$$4NAE = \{\varphi \mid \varphi \text{ a } NAE \text{ satisfiable } 4\text{-CNF formula}\}$$

תזכורת: השמה מסויימת NAE מספקת פסוקית אם"ם קיים ליטרל בפסוקית המשוערך ל $true$ וקיים ליטרל המשוערך ל $false$.

עבור איזה פער $gap\text{-}4NAE$ היא $NP\text{-}Hard$?

רשמו את מספר התשובה בעלת המספר הנמוך ביותר מבין האפשריות:

שאלה 3:

נתון ש $NPC = coNPC$

איזו טענה נובעת?

רשמו את מספר התשובה בעלת המספר הנמוך ביותר מבין האפשריות:

שאלה 4:

בעיית $17\text{-to-1 } CSG_E$ מוגדרת להיות בעיית CSG_E כ"ש לכל קשת $(u, v) \in E$ ובחירת צבע $A(v) \in \Sigma$, קיימים בדיוק 17 צבעים ל u שמספקים את האילוץ על (u, v) .

תהי A בעיית $17\text{-to-1 } CSG_E$ כ"ש $|\Sigma_A| = 24$, עבור איזה פער בעיית $gap\text{-}A$ פתירה בזמן קבוע?

רשמו את מספר התשובה בעלת המספר הגבוה ביותר מבין האפשריות:

שאלה 5:

נתון ש $\Sigma_5 \neq \Pi_5$.

איזו טענה נובעת?

רשמו את מספר התשובה בעלת המספר הנמוך ביותר מבין האפשריות:

שאלה 6:

נגדיר את השפה $EXP\text{-}CLAUSE\text{-}SAT$:

$\{\varphi \mid \varphi \text{ a satisfiable } CNF \text{ formula with } k \text{ variables and } m \text{ clauses, and } m \geq 2^k\}$

באיזו מחלקה נמצאת $EXP\text{-}CLAUSE\text{-}SAT$?

רשמו את מספר התשובה בעלת המספר הנמוך ביותר מבין האפשריות:

שאלה 7:

נגדיר את השפה $SIMPLE\text{-}PATH$:

$\{G, s, t \mid G = (V, E) \text{ a graph, } s, t \in V,$

$\text{there exists in } G \text{ a simple path from } s \text{ to } t \text{ of length } \geq \frac{n}{2}\}$

באיזה מחלקה נמצאת $SIMPLE\text{-}PATH$?

רשמו את מספר התשובה בעלת המספר הנמוך ביותר מבין האפשריות:

שאלה 8:

נתונה המחלקה הבאה:

$$\mathcal{C} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} BPP_{(0, \frac{1}{2^{nk}})}$$

לאיזה מחלקה שווה \mathcal{C} ?רשמו את מספר התשובה בעלת המספר הנמוך ביותר מבין האפשריות:

חלק שני

בחלק זה 4 שאלות. כל שאלה שווה 10 נקודות. סה"כ חלק זה שווה 40 נקודות.

שאלה 1:

תזכורת: $H^* \subseteq \{0,1\}^{2^n}$ הוא קוד Hadamard המורחב, כלומר

$$H^* = \{\chi_{S,b} \mid S \subseteq \{1, \dots, n\}, b \in \{0,1\}\}$$

$$\chi_{S,b}(x) = b + \sum_{i \in S} x_i \pmod 2, \quad \chi_{S,b}: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$

הרכיבו את H^* עם קוד ריד סולומון בעל קצב k שמוגדר מעל שדה הגדול ביותר שמאפשר הרכבה.

בטאו בעזרת n, k את אורך הבלוק, הקצב, המרחק, וגודל האלפבית שקיבלתם.

שימו לב זו אינה שאלת בחירה מרובה, אך אין צורת לרשום הוכחה.

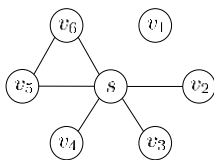
אורך בלוק: קצב: מרחק: גודל א"ב:

בשאלות הבאות נתייחס להגדרה הבאה:

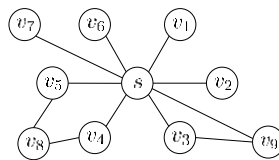
יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון, ותהי $S \subseteq V$. נאמר ש S היא STAR אם:

- קיים קודקוד $s \in S$ כ"ש לכל $u \in S \setminus \{s\}$ מתקיים $(s, u) \in E$
- לכל $u, v \in S \setminus \{s\}$ מתקיים $(u, v) \notin E$

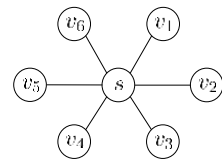
לדוגמא, בגרפים הבאים:



$\{s, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
אינה STAR
 $\{s, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
היא STAR



$\{s, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
היא STAR



$\{s, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
היא STAR

שאלה 2:

נגדיר את השפה $MAXSTAR$: $\{G, k \mid G = (V, E) \text{ a graph, } V \text{ contains a } STAR \text{ of size } k,$ $\forall k' > k, V \text{ does not contain a } STAR \text{ of size } k'\}$ באיזה מחלקה נמצאת $MAXSTAR$?רשמו את מספר התשובה בעלת המספר הנמוך ביותר מבין האפשריות:

שאלה 3:

נגדיר את השפה $DEG-STAR$: $\{G, k \mid G = (V, E) \text{ a graph, } V \text{ contains a } STAR \text{ of size } k,$

$$|E| \leq 2k, \max_{v \in V} \{degree(v)\} \geq \frac{|E|+k}{2}\}$$

באיזה מחלקה נמצאת $DEG-STAR$?רשמו את מספר התשובה בעלת המספר הנמוך ביותר מבין האפשריות:

שאלה 4:

נגדיר את השפה $E-STAR$: $\{G, k \mid G = (V, E) \text{ a graph, } V \text{ contains a } STAR \text{ of size } k,$

$$|E| \leq (3k)^2 + 1000\}$$

באיזה מחלקה נמצאת $E-STAR$?רשמו את מספר התשובה בעלת המספר הנמוך ביותר מבין האפשריות:

חלק שלישי

בחלק זה 2 שאלות. כל שאלה שווה 10 נקודות. סה"כ חלק זה שווה 20 נקודות.

- כתיבת "לא יודע" בצורה ברורה במקום פתרון תזכה ב 2 מתוך 10 נקודות לשאלה.
- מעבר לכך, הוספת בדיחה (טובה!) תזכה בנקודה נוספת לשאלה.
- עבור שתי השאלות בחלק זה, ניקוד השאלה עם הציון הגבוה ישוקלל ביחס 1.5, וניקוד השאלה עם הציון הנמוך ישוקלל ביחס 0.5.

שאלה 1:

נגדיר את השפה STAR-PART:

$\{G, k \mid G = (V, E) \text{ a graph, } V \text{ can be partitioned to } \frac{|V|}{k}$

vertex disjoint STARS, each of size $k\}$

באיזה מחלקה קטנה ביותר ביחס להכלה נמצאת STAR-PART?

הוכיחו את תשובתכם.

A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying most of the page. It is intended for the main content of the document.

שאלה 2:

נגדיר את השפה *CLIQUE-IS-PART*:
 $\{G, k_1, k_2 \mid G = (V, E) \text{ a graph,}$
 $V \text{ can be partitioned to } \frac{|V|}{k_1} \text{ vertex disjoint } \textit{Independent-Sets}, \text{ each of size } k_1,$
 $V \text{ can be partitioned to } \frac{|V|}{k_1} \text{ vertex disjoint } \textit{Cliques}, \Pi_1 \text{ each of size } k_1$
 $V \text{ can be partitioned to } \frac{|V|}{k_2} \text{ vertex disjoint } \textit{Cliques}, \Pi_2 \text{ each of size } k_2$
 $\text{for every pairs of cliques, } S_1 \text{ of } \Pi_1 \text{ and } S_2 \text{ of } \Pi_2, |S_1 \cap S_2| = 1\}$

באיזה מחלקה קטנה ביותר ביחס להכלה נמצאת *CLIQUE-IS-PART*?

הוכיחו את תשובתכם.

A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying most of the page. It is intended for the main content of the document.