מבני נתונים

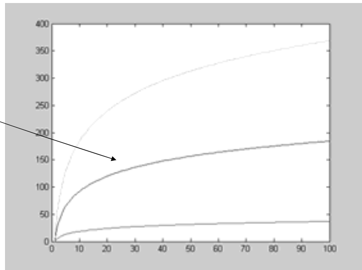
תרגול 2

ליאור שפירא

O Notation

- קצת דוגמאות משיעורי הבית

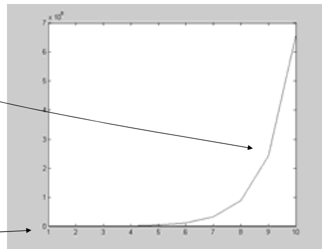
$40\log n = O(8\log n)$



O Notation

- קצת דוגמאות משיעורי הבית

$2^n/300 = O(n)$



שאלה 3 (תרגיל 1)

- סעיף א' - מגדילים ב1/3- כל פעם את המערך

- בשיעור ראינו שלכל פעולה "זולה" נשים 2 מטבעות, אחת על האבר החדש ואחת על אבר נוסף
- פעולה "יקרה" משתמשת במטבעות הקיימים בכדי לממן את עצמה
- מה ההבדל?
  - אם פעולה יקרה אחת מגדילה את המערך מ-k*3/4 ל-k והבאה אחריה מ-k ל-k*4/3 אזי ביניהן יש רק ¼ * k פעולות זולות
- אז כמה מטבעות צריך לשים בכל פעולה?
  - 4
- ולכן סיבוכיות נשארת O(1) לפעולה (amortized)

שאלה 3 (תרגיל 1)

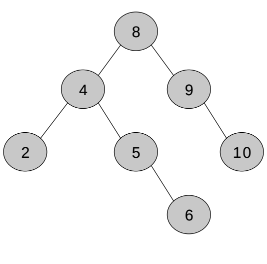
- סעיף ב' – מוסיפים 10 תאים כשנגמר המקום

- מה הסיבוכיות ל-m פעולות במקרה זה?

$O(m^2)$

עצי חיפוש בינאריים

- לכל קודקוד 4 שדות
  - מצביע לבן שמאלי – left
  - מצביע לבן ימני – right
  - מצביע לאב – p
  - מפתח - key



כל המפתחות בתת עץ ימני > v.key > כל המפתחות בתת עץ שמאלי

תרגיל

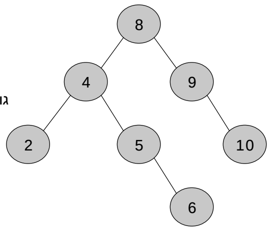
- בהינתן עץ חיפוש בינארי (בעל n צמתים), הדפיסו את כל המפתחות בו, בסדר ממוין, בזמן O(n)

```
In-order(v)
If (v==null) return
Else
    In-order(v.left)   ?  גודל תת עץ שמאלי
    Print v.key        ?  זמן קבוע (1)
    In-order(v.right)  ?  גודל תת עץ ימני
    Return
End if
```

תרגיל

- בהינתן עץ חיפוש בינארי (בעל n צמתים), הדפיסו את כל המפתחות בו, בסדר ממוין, בזמן O(n)

```
In-order(v)
If (v==null) return
Else
    In-order(v.left)   ?  גודל תת עץ שמאלי
    Print v.key        ?  זמן קבוע (1)
    In-order(v.right)  ?  גודל תת עץ ימני
    Return
End if
```

ההוכחה: באינדוקציה, עוברים על כל צומת פעם אחת ולכן O(n)

תרגיל Amortized

- הראו כיצד לממש ADT של מחסנית (לא מוגבלת)בעזרת מערך, כך שכל פעולה תיקח Amortized O(1) וגודל המערך תמיד יהיה O(n) כאשר n מס' האברים במחסנית
  - אנו נראה פתרון בו גודל המערך קטן שווה ל-4 פעמים מס' אברי המחסנית
- הפתרון
  - נגמר מקום במערך ← מגדיל פי 2
  - נשארו ½ מהאברים ← נקטין פי 2

לא טוב, ייתכן מצב בו נגדיל נקטין כל הזמן, יקר!

- פתרון אחר
  - כשנגמר המקום נגדיל פי 2
  - כשהמערך מלא רק עד כדי ¼ נקטין פי 2

מימוש הפתרון

- Size – מס' האברים במחסנית
- Max-size – גודל המערך
- A – מערך בגודל Max-size

<u>Initialization</u>

```
Size ← 0
Max-size ← 2
A ← array of size 2
```

<u>Push(S,x)</u>

```
If (size<max-size)
    A[size+1] ← x
    Size ← size + 1
Else
    A' ← new array of size 2*max-size
    A ← A' (+copy)
    max-size ← max-size*2
    A[size+1] ← x
    Size ← size +1
End if
```

<u>Pop(S)</u>

```
Return-value = A[size]
Size ← size-1
If (size < max-size/4)
    A' ← array of size max-size/2
    A ← A' (+copy)
    Max-size ← max-size/2
End if
```

המשך התרגיל...

- משפט: עלות ה-Amortized היא O(1)
  - פעולת הכנסה יקרה ← המערך ½ מלא
  - פעולת הוצאה יקרה ← המערך ½ מלא
- למה 1 – תמיד אחרי פעולה "יקרה" המערך ½ מלא
- למה 2 – נניח op1 פעולה יקרה, ו-op2 הפעולה היקרה אחריה. נניח שאחרי op1 גודל המערך k אזי בין op1 ל-op2 יש לפחות k/4 פעולות
- הוכחה
  - אחרי Op1 גודל המחסנית הוא m/2
  - אזי, אם op2 פעולת הגדלה, אז עד אליה יהיו ≤ m/2 פעולות
  - אם op2 פעולת צמצום, אז עד אליה יהיו ≤ m/4 פעולות. מ.ש.ל

הוכחת המשפט (שיטת הבנק)

- תזכורת:
  - amortized(op) = cost(op) – withdrawal + deposit
- נרצה להוכיח שכל פעולה amortized(op) = O(1)
- במקרה שלנו:
  - כל פעולה תפקיד 4 מטבעות
  - פעולה יקרה תמשוך מטבעות בגודל המערך שהיא מקצה
  - נרצה להראות שהפעולות הזולות משלמות על הפעולה היקרה שבאה אחריהן
- פעולת הגדלת מערך
  - עולה m (העתקה של m)
  - לפניה היו לפחות m/4 פעולות שהפקידו 4, כלומר $4 \cdot m/4 = m$
  - לכן, הבנק תמיד בפלוס, ועלות כל פעולה מכוסה

נדלג על שאר ההוכחה (הקטנת המערך)

הוכחת המשפט (שיטת הפוטנציאל)

- נרצה להגדיר פונק' פוטנציאל Φ כך ש:
  - $\Phi(start)=0$
  - $\Phi(end)\geq 0$
- תזכורת: $amortized(op)=\cos t(op)+\Delta\Phi$
- נרצה להוכיח שלכל פעולה $amortized(op)=O(1)$
- נגדיר את Φ:

$$\Phi=\left(\begin{cases}\frac{\max size}{2}-size & \text{if } size<\frac{\max size}{2} \quad \text{בהורדה}\\ 2\left(size-\frac{\max size}{2}\right) & \text{if } size>\frac{\max size}{2} \quad \text{בהוספה}\end{cases}\right)-1$$

בעזרת Φ ניתן לעשות דברים "עדינים" יותר משיטת הבנק