מבני נתונים 07b

תרגול 9

22/6/2007

רקורסיה

ליאור שפירא

רקורסיה

- נקבל ביטוי מהצורה $T(n) = aT(g(n)) + h(n)$
- נרצה למצוא f(n) כך ש- $T(n) = \Theta(f(n))$
- n מספר שלם
- תמיד נחשב עד תנאי עצירה מסוים
- בקורס הזה נתעניין בהתנהגות האסימפטוטית של T ולא בחישוב מדויק

תרגיל 1

- פתרו את הרקורסיה הבאה: $T(n) = 9T(n/7) + n$
- פתרון 1: Brute Force $T(n) = \Theta(f(n))$

$$T(n) = \quad 9T(n/7) + n =$$

$$9(9T(n/49) + n/7) + n = 81T(n/49) + \frac{9n}{7} + n =$$

$$81(9T(n/7^3) + n/49) + \frac{9n}{7} + n = 9^3T(n/7^3) + 9^2\, n/7^2 + 9n/7 + n =$$

$$\ldots$$

$$9^{k+1}T(n/7^{k+1}) + n\underbrace{(1 + \frac{9}{7} + \left(\frac{9}{7}\right)^2 + \ldots(9/7)^k)}_{\to\ \infty}$$

תרגיל 1

- מה עשינו לא נכון?
  - אי אפשר להמשיך עד אינסוף, צריך לעצור ב-T(1) או קבוע אחר
  - באיזה k נעצור? $\frac{n}{7^{k_0+1}}=1 \Rightarrow 7^{k_0+1}=n \Rightarrow k_0=\log_7 n$
  - זהו **עומק הרקורסיה** (ההתפצלות מדרגה 7)
  - ונחזור לביטוי...

$$T(n)=9^{\log_7 n+1}\cdot T(n/7^{\log_7 n+1})+n(1+\frac{9}{7}+\left(\frac{9}{7}\right)^2+\ldots(9/7)^{\log_7 n})$$

$$=\Theta(9^{\log_7 n}+n(9/7)^{\log_7 n})=\Theta(n^{\log_7 9})$$

Master Theorem – רקורסיה

- "מתכון" לפתור רקורסיות מסוג מסוים
- עבור נוסחת רקורסיה כך ש $T(n)=aT(n/b)+f(n)$
- קיימים שלושה מקרים

1. $\exists \varepsilon>0:\quad f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon}) \quad \rightarrow T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

2. $f(n)=\Theta(n^{\log_b a}) \quad \rightarrow T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\log n)$

3. $\exists \varepsilon>0, c<1:\quad f(n)=O(n^{\log_b a+\varepsilon}),\ af(n/b)\le cf(n) \quad \rightarrow T(n)=\Theta(f(n))$

חזרה לתרגיל 1

$$T(n) = 9T(n/7) + n$$

- a=9;b=7;f(n)=n
- האם אנחנו במקרה הראשון?

$$\exists \varepsilon : n = O(n^{\log_7 9 - \varepsilon})$$

$$\log_7 9 \approx 1.2$$

$$\varepsilon = 0.1 \Rightarrow n \le n^{1.1} \Rightarrow$$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_7 9})$$

דוגמה נוספת

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 10n$$

$$a = 2, b = 2, f(n) = 10n, \log_b a = \log_2 2 = 1$$

$$n^{\log_b a - \varepsilon} = n^{1-\varepsilon} \Rightarrow 10n = O(n^{1-\varepsilon})\,?$$

$$n^{\log_b a} = n \Rightarrow 10n = \Theta(n)\,?$$

מסקנה: זהו מקרה 2

תרגיל 2

- פתרו את הרקורסיה הבאה: $T(n)=\sqrt{n}T(\sqrt{n})+n$
- פתרון
  - האם מתאים ל-master theorem?
    - לא
  - ננסה לפתור בצורה ישירה

$$T(n)=\sqrt{n}T(\sqrt{n})+n$$

$$T(n)=\sqrt{n}(\sqrt{\sqrt{n}}T(\sqrt{\sqrt{n}})+\sqrt{n})+n$$

$$T(n)=\sqrt{n}(\sqrt{\sqrt{n}}(\sqrt{n}(\sqrt{\sqrt{\sqrt{n}}}T(\sqrt{\sqrt{\sqrt{n}}})+\sqrt{\sqrt{n}})+n)+\sqrt{n})+n$$

- לא נראה רעיון כזה טוב

תרגיל 2

$$T(n)=\sqrt{n}T(\sqrt{n})+n$$

- רמז: איננו מעונינים בפתרון מדויק, אלא בהערכה, סדר גודל.
- רמז: ננסה לפתור עבור ח'ים ספציפיים, מסוג מסוים.
- למשל $n=2^{2^m}$
- עבורו

$$T(2^{2^m})=\sqrt{2^{2^m}}T(\sqrt{2^{2^m}})+2^{2^m}$$

$$=2^{2^{m-1}}T(2^{2^{m-1}})+2^{2^m}$$

$$=m\cdot 2^{2^m}$$

ערך בכל חזרה

חזרות

$$(n=2^{2^m}\ \rightarrow m=\log\log n)$$

$$=n\log\log n$$

תרגיל 3

- פתרו את הרקורסיה הבאה: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\log^2 n$
- פתרון
  - בואו ננסה לפתוח את זה קצת...

$$T(n) = n\log^2 n + n\log^2(\frac{n}{2}) + n\log^2(\frac{n}{4}) + n\log^2(\frac{n}{8}) + \ldots$$

  - נמצא חסם משני הצדדים

תרגיל 3

- חסם תחתון
  - בואו נשמור רק את חצי האברים הגדולים ביותר
  - מיהו האבר הקטן ביותר ששמרנו?

$$\frac{n}{2^{\log n/2}} = n \cdot \sqrt{\frac{1}{2^{\log n}}} = n \cdot \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

  - לכן אם נחליף את n/k בשורש n נקבל...

$$T(n) \geq \frac{\log n}{2} n \log^2 \sqrt{n} = \frac{\log n}{2} n (\frac{1}{2} \log n)^2 = \frac{n \log^3 n}{8}$$

$$T(n) = \Omega(n \log^3 n)$$

תרגיל 3

- חסם עליון
  - נחליף כל n/k ב-n ונקבל

$$T(n) \le n\log^2 n + n\log^2(n) + n\log^2(n) + n\log^2(n) + \dots$$

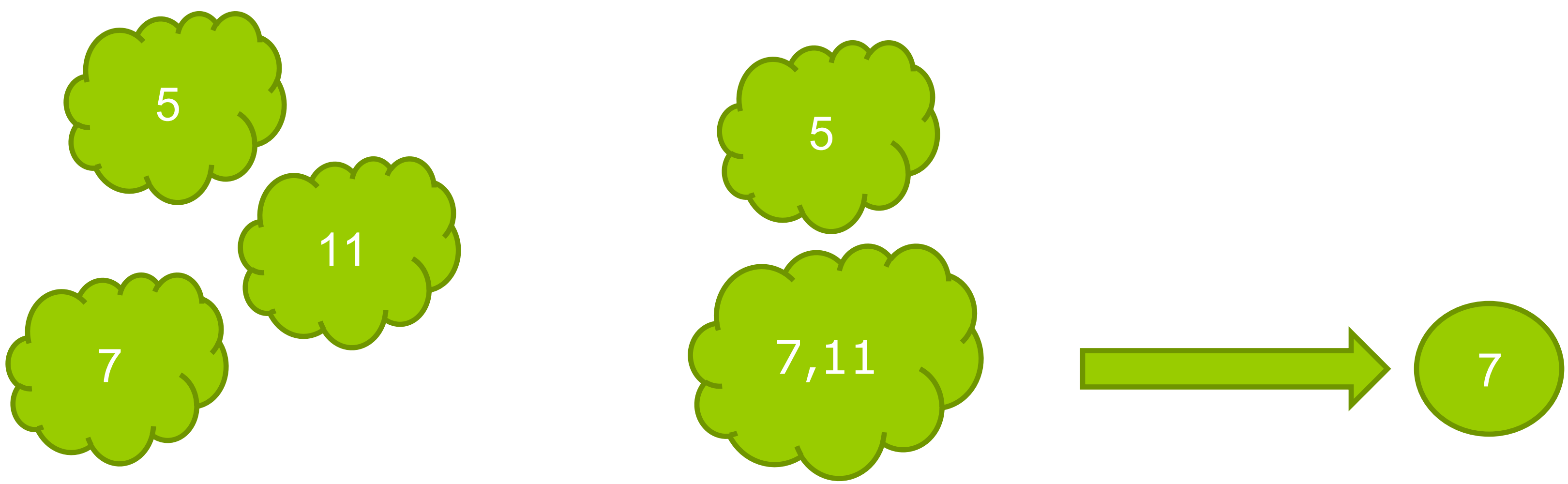
$$= \log n \cdot n\log^2(n) = n\log^3 n$$

$$T(n) = O(n\log^3 n)$$

Union Find

מבנה Union Find

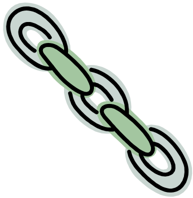
- מבנה נתונים המאפשר את הפעולות הבאות
  - הכנסה (Insert) – צור סט ובו האבר החדש
  - איחוד (Union) – אחד שני סטים קיימים
  - חיפוש (Find) – בהינתן אבר מצא את הסט אליו הוא שייך והחזר אבר המייצג את הסט (Representative)



הכנסה של 3 אברים

איחוד של הקב' של 7 ו-11

נחפש את 11

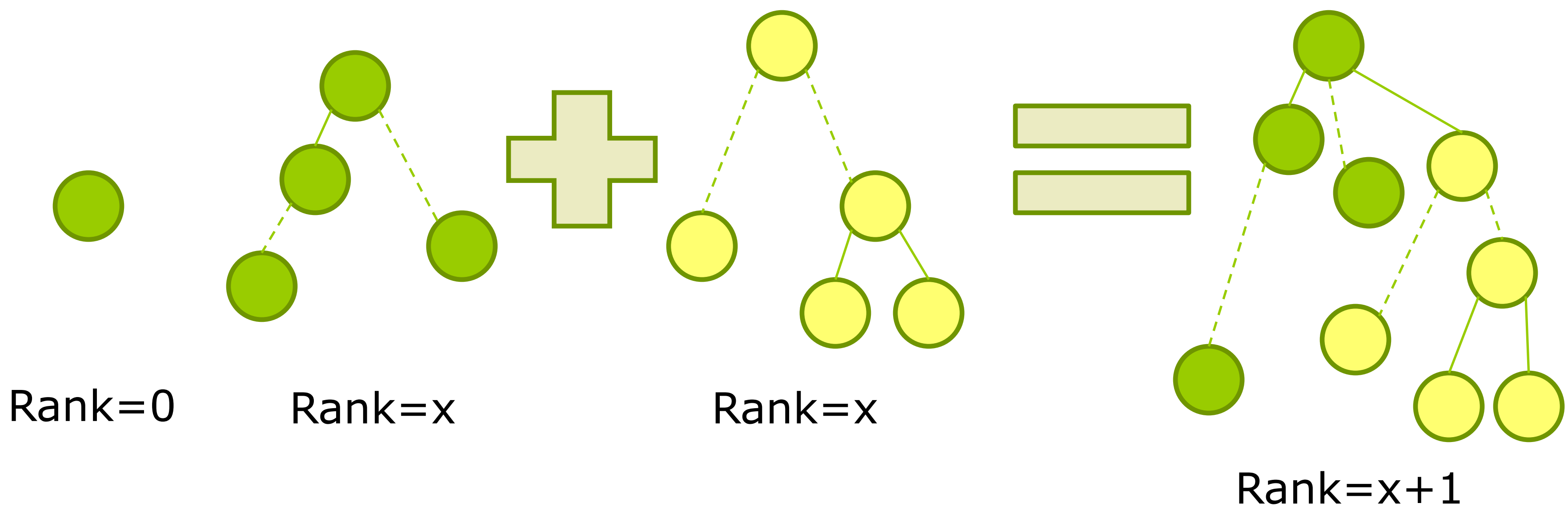


מימוש Union Find

1. מימוש ע"י רשימות מקושרות
   - כל סט יהיה רשימה מקושרת
   - איחוד שני סטים הינו בעצם שרשור הרשימות
   - חיפוש לוקח זמן לינארי
2. מימוש ע"י עצים
   - כל סט נמצא בעץ (מבנה הנתונים כולו – יער)
   - נציג כל סט יהיה השורש של העץ
   - איחוד ע"י חיבור שני עצים (הרכבת אחד על השני)
   - חיפוש ע"י מציאת האבר וטיפוס בעץ עד לשורש

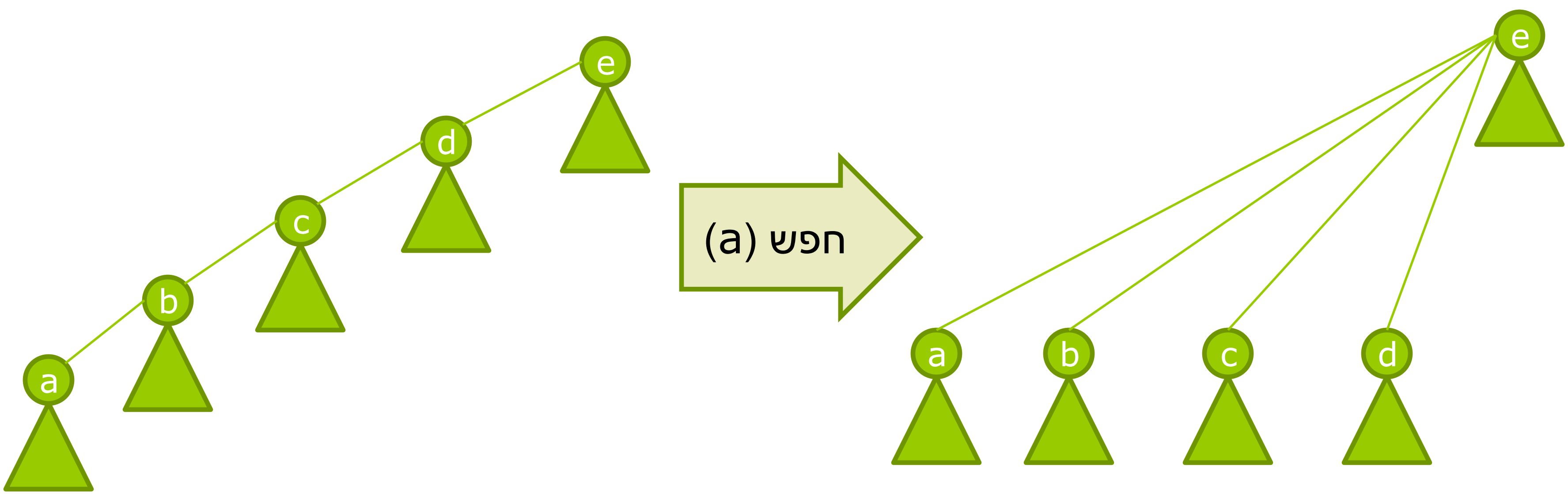
מימוש Union Find

- מה יעילות המבנה במימוש ע"י עצים?
  - מימוש נאיבי – כמו רשימות מקושרות. למה?
  - שיפורים שניתן לעשות
    - Union By Rank



מימוש Union Find

- מה יעילות המבנה במימוש ע"י עצים?
  - מימוש נאיבי – כמו רשימות מקושרות. למה?
  - שיפורים שניתן לעשות
    - Union By Rank – משפר את היעילות של הפעולות לזמן O(logn) amortized
    - כיווץ מסלולים (Path Compression)



מימוש Union Find

- מה יעילות המבנה במימוש ע"י עצים?
  - מימוש נאיבי – כמו רשימות מקושרות. למה?
  - שיפורים שניתן לעשות
    - Union By Rank – משפר את היעילות של הפעולות לזמן O(logn) amortized
    - כיווץ מסלולים (Path Compression) – משפר את היעילות של הפעולות כך: עבור n פעולות הכנסה (יצירת סט) ו-f פעולות חיפוש נקבל יעילות $\Theta(n+f\cdot(1+\log_{2+f/n}n))$
    - מה אם נפעיל את שתי השיטות יחדיו?
      החסם על סדרת m פעולות הינו $O(m\cdot\alpha(n))$

הפ' ההופכית לפ' אקרמן, זו פ' שגדלה מאד מאד לאט... עבור רוב השימושים של union find ערכה קטן מ-4

לפרטים נוספים: http://mathworld.wolfram.com/AckermannFunction.html

תרגיל 4

- בהינתן מבנה נתונים של union find (הכולל את השיפורים של union by rank & path compression), ניתנת סדרה של m פעולות (make-set, union, find) ובה כל פעולות ה-union נעשות לפני פעולות ה-find. הראו שסך הזמן לביצוע סדרה זו הוא לינארי O(m)
- פתרון
  - מהו החסם העליון? $O(m \cdot \alpha(n))$
  - נפתור בשיטת הבנק 

נכניס אברים

↓

נרכיב סטים

↓

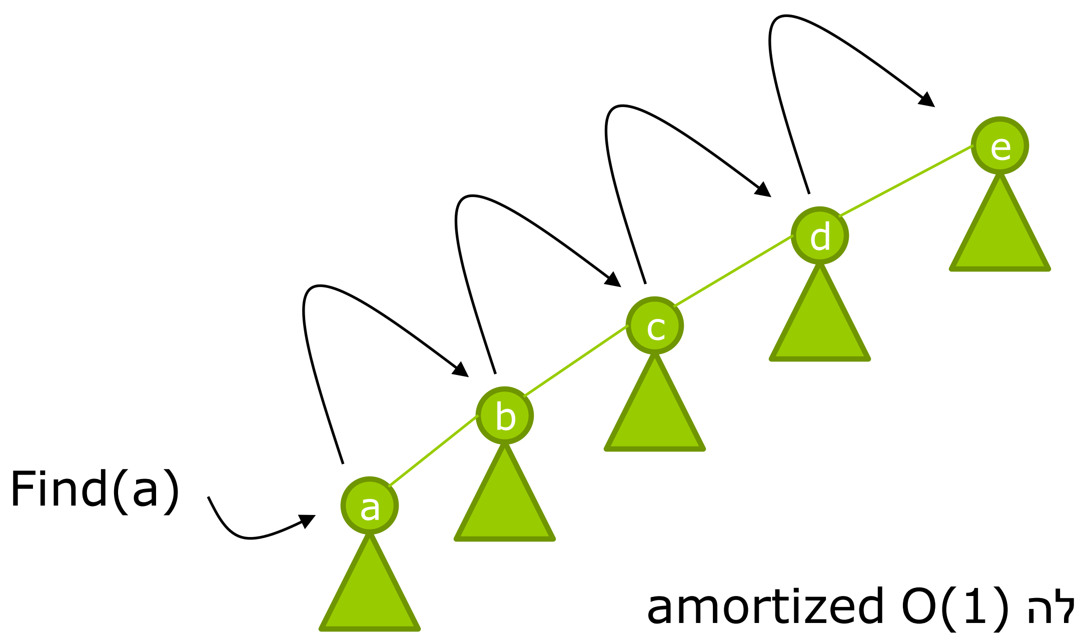
נבצע חיפושים

תרגיל 4

- פתרון בשיטת הבנק
  - כדי שסדרה של m פעולות תיקח זמן O(m) כל פעולה צריכה לעלות מחיר קבוע
  - הפעולות הזולות ישלמו על היקרות
  - אז מי הפעולות היקרות?
    - Make-set
    - Union
    - Find

תרגיל 4

- פתרון בשיטת הבנק (המשך)
  - נרצה לשלם על פעולות find בעזרת הפעולות הזולות
  - בכל פעולת union נשים מטבע על השורש של הסט החדש
  - בפעולת find נטפס ונעשה path compression
  - כל פעולה תכווץ שורש שנעשה עליו union ולכן יש שם מטבע



סה"כ m פעולות שכל אחת עולה amortized O(1)

תרגיל 5 (+-)

- בהינתן גרף G(V,E), מצאו את רכיבי הקשירות של הגרף
- פתרון?
  - נקרא ל-make set על כל קדקוד של הגרף
  - נעבור על כל הקשתות ולכל אחת נקרא ל-
    - Union(find(u),find(v)) כאשר u ו-v צמתי הגרף
  - כל סט במבנה הנתונים מכיל כעת רכיב קשירות יחיד
  - סיבוכיות $O((|V|+|E|)\cdot\alpha(|V|))$

הסוף...