

מספר קורס: 0368.2158

סמסטר ב', מועד א', תשס"ז

י"ד באב תשס"ז 29/7/2007

**מבחן במבני נתונים + תשובות****פרופ' חיים קפלן, אלעד ורבין, ליאור שפירא**

משך המבחן שלוש וחצי שעות (לא תינתן הארכה)

הבחינה עם חומר סגור, ללא מחשבים/מחשבוניס. מותר להביא דף עזר אחד.

**הוראות כלליות:**

1. יש לרשום מספר ת.ז. ומספר מחברת בראש כל דף.
2. המחברות הן לטייטה בלבד ולא תיבדקנה.
3. מותר להשתמש באלגוריתמים שנלמדו בכיתה כקופסאות שחורות.
4. אין לכתוב אלגוריתמים בפסאודו-קוד אלא להסביר (באופן משכנע) את הרעיון הכללי.
5. כתבו תשובות קצרות ומדויקות. תשובות לא ממוקדנות וארוכות, מסובכות או מסורבלות יקבלו ניקוד חלקי גם אם הן נכונות. תשובה ללא נמוק במקום שנדרש נמוק לא תזכה בנקודות.
6. סיבוכיות זמני ריצה יש לכתוב כחסם הדוק ככל שתוכלו, בכתב (ב) O.

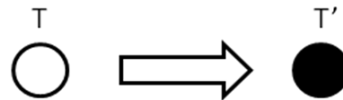
**מהצחה!!**

שאלה	ציון	ניקוד מקסי
1		20
2		12
3		12
4		15
5		8
6		13
7		10
8		10
סה"כ		100

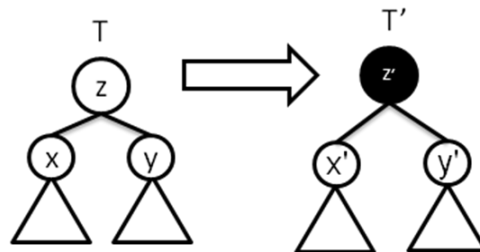
**שאלה 1 (20 נקודות)**

יהי  $T$  עץ  $2-4$  (האלמנטים נמצאים בעלים, בצמתים הפנימיים יש רק מפתחות להנחות את החיפוש). נהפוך את  $T$  לעץ אדום שחור  $T'$  ע"פ אחד המקרים הבאים:

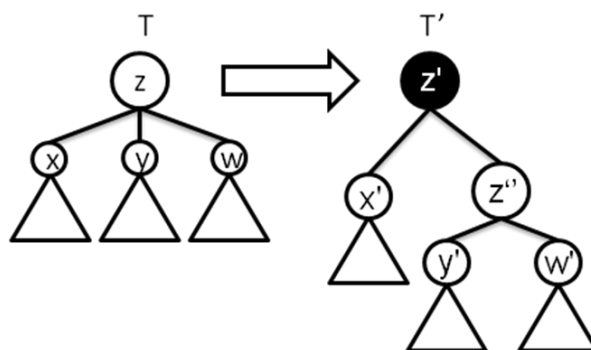
1. במידה ו- $T$  מכיל עלה יחיד, גם  $T'$  יכול עלה יחיד שחור ובו אותו אלמנט.



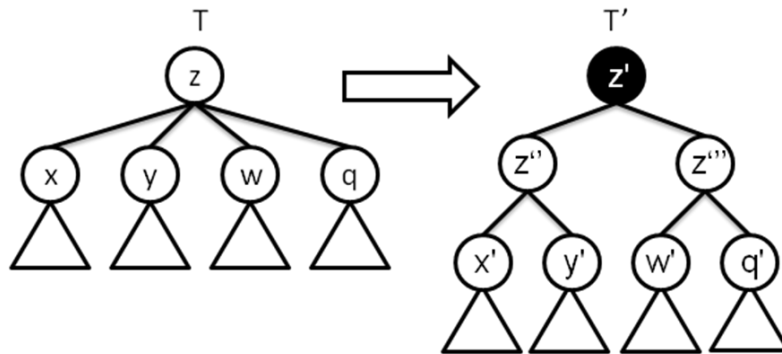
2. במידה והשורש של  $T$  הוא צומת  $z$  עם 2 בנים  $x, y$  אזי שורשו של  $T'$  יהיה צומת שחור  $z'$ .  
הבן השמאלי של  $z'$  יהיה שורש העץ  $x'$  שמתקבל מהפעלת התהליך רקורסיבית על תת העץ ששורשו  $x$ , ואילו הבן הימני של  $z'$  יהיה שורש העץ  $y'$  שמתקבל מהפעלת התהליך רקורסיבית על תת העץ ששורשו  $y$ . המפתח בצומת  $z'$  זהה למפתח ב- $z$ .



3. במידה והשורש של  $T$  הוא צומת עם 3 בנים  $x, y, w$  אזי שורשו של  $T'$  יהיה צומת שחור  $z'$ .  
הבן השמאלי של  $z'$  יהיה שורש העץ  $x'$  שמתקבל מהפעלת התהליך רקורסיבית על תת העץ ששורשו  $x$ .  
הבן הימני של  $z'$  יהיה צומת אדום  $z''$ . לצומת  $z''$  יש שני בנים, השמאלי יהיה שורש העץ  $y'$  שמתקבל מהפעלת התהליך רקורסיבית על תת העץ ששורשו  $y$  ואילו הימני יהיה שורש העץ  $w'$  שמתקבל מהפעלת התהליך רקורסיבית על תת העץ ששורשו  $w$ .  
המפתחות ב- $z'$  ו- $z''$  הם המפתחות מ- $z$ .



4. במידה והשורש של  $T$  הוא צומת עם 4 בנים  $x, y, w, q$  אזי שורשו של  $T$  יהיה צומת שחור  $z'$  ולו שני בנים אדומים  $z'', z'''$ . בניו של  $z''$  יתקבלו מהפעלת התהליך רקורסיבית על תתי העצים ששורשם  $x, y$  ואילו בניו של  $z'''$  יתקבלו ע"י הפעלת התהליך רקורסיבית על תתי העצים ששורשם  $w, q$ . המפתחות ב-  $z', z'', z'''$  הם המפתחות מ-  $z$  (השורש של  $T$ ).



מועד א', גירסה 1

4 מתוך 4

מספר תעודת זהות:

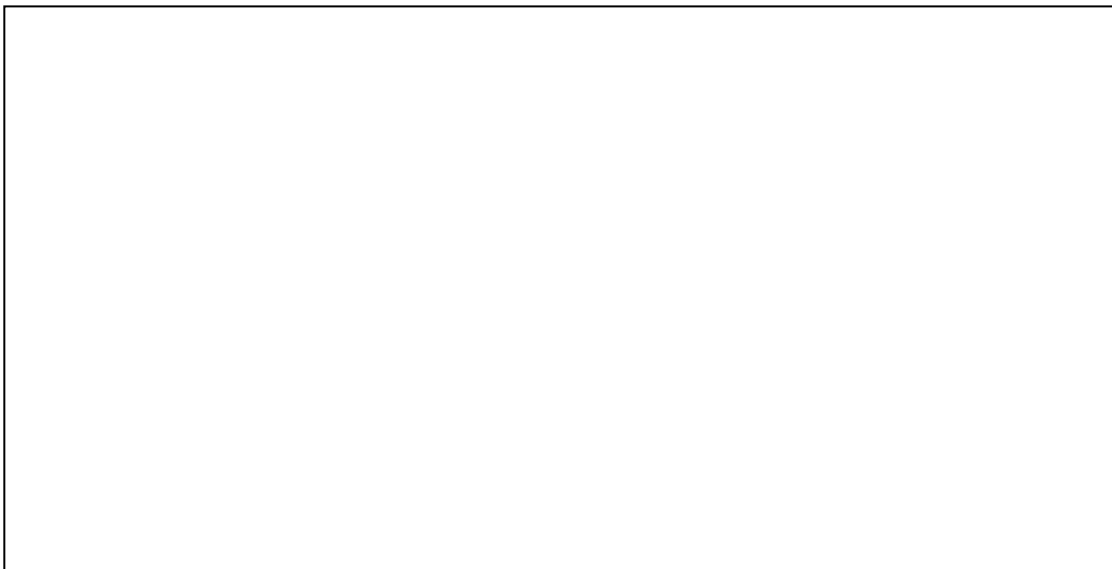
מספר מחברת:

ענה על השאלות הבאות:

א. הוכיחו כי  $T$  הינו בהכרח עץ אדום-שחור חוקי לכל עץ  $T$  הניתן כקלט.



ב. האם כל עץ אדום שחור הוא תמונה של עץ  $T$  כלשהוא? הוכיחו אם כן, הביאו דוגמה נגדית אם לא.



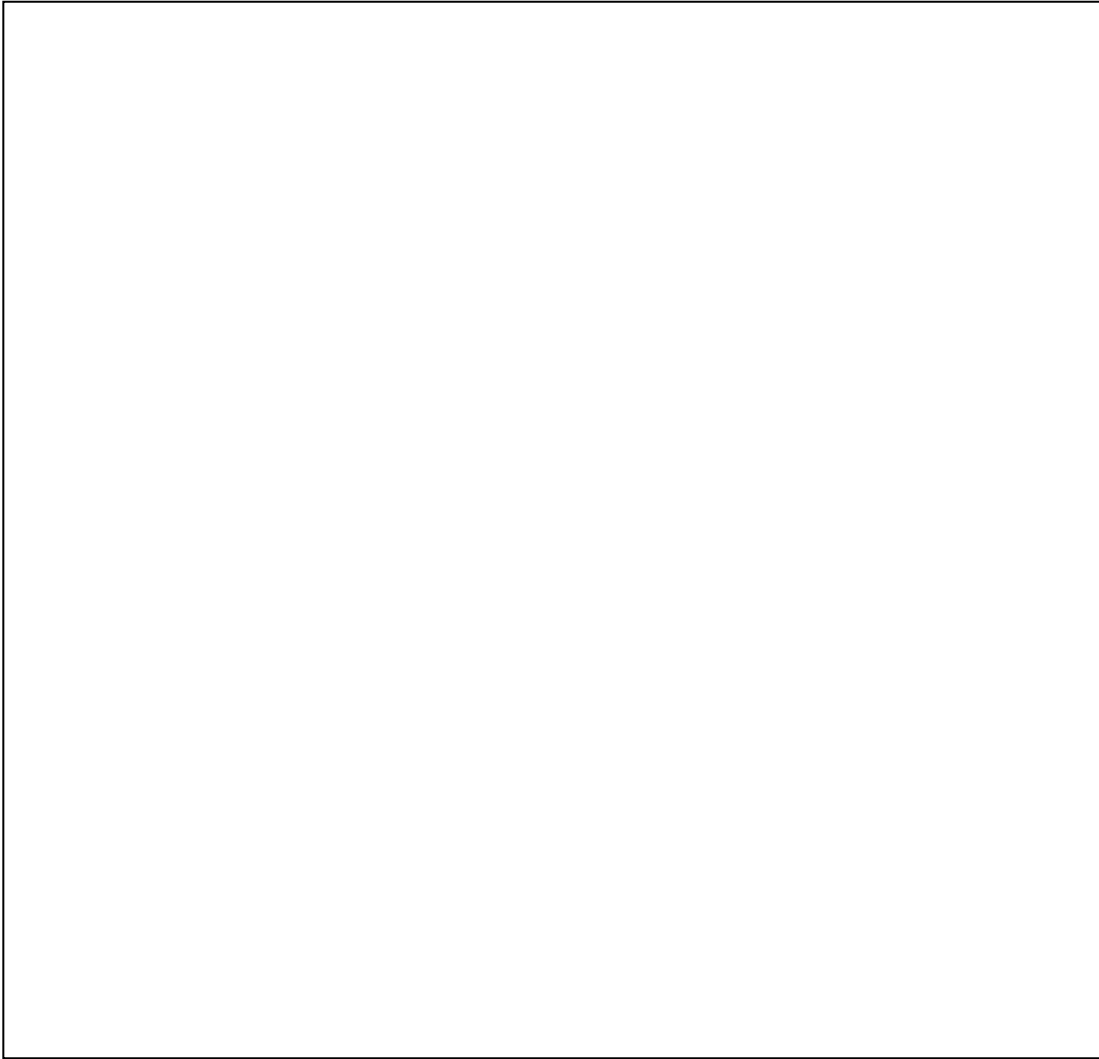
מועד אי, גירסה 1

5 מתוך 5

מספר תעודת זהות:

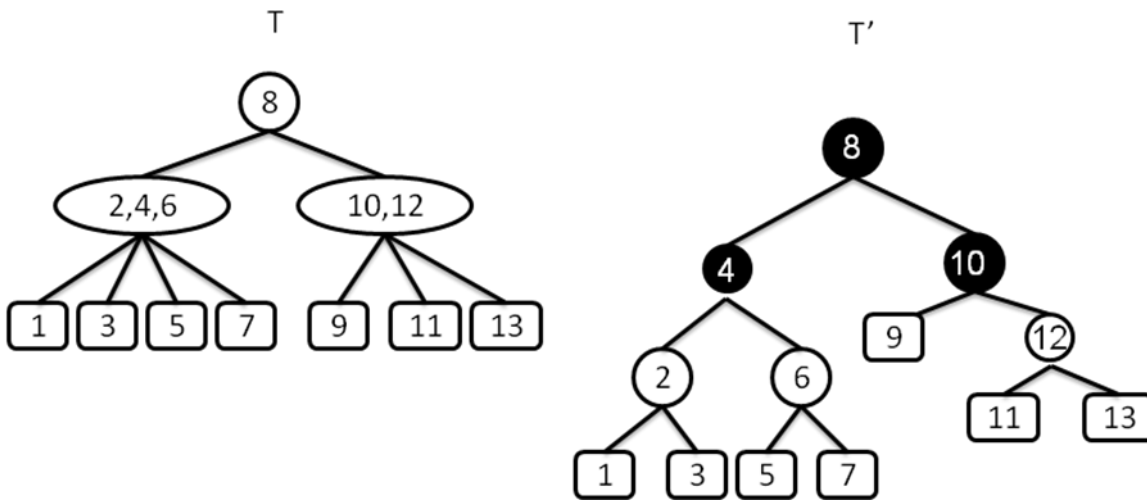
מספר מחברת:

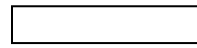
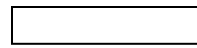
ג. הגדירו התאמה "הפוכה" המתרגמת עץ אדום-שחור לעץ-2+.



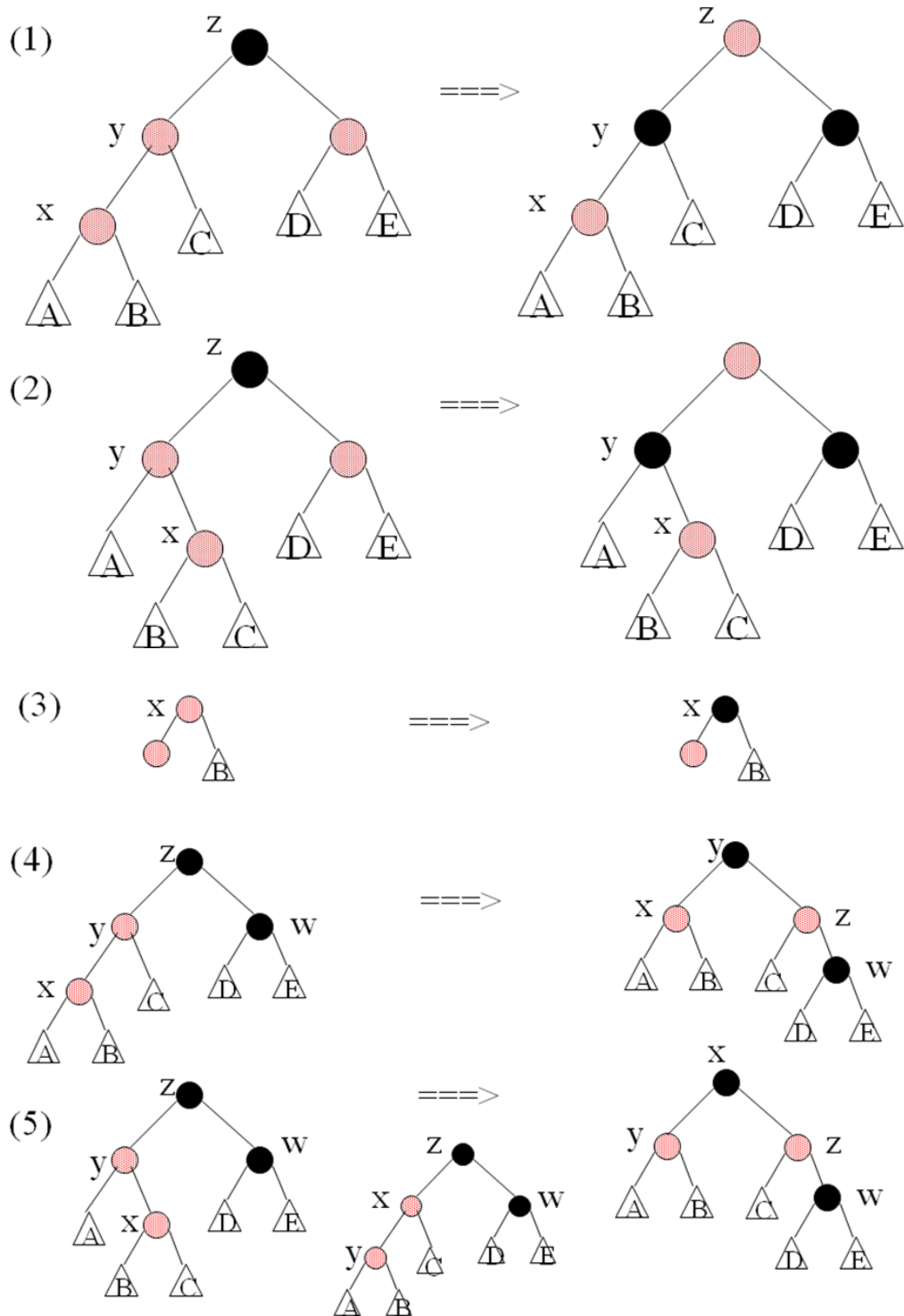
ד. לפניכם עץ  $T+2-4$  ועץ אדום-שחור  $T'$ .  $T'$  התקבל ע"י הפעלת התהליך המתואר בשאלה על  $T$ .  
 נבצע פעולת  $insert(x)$  על  $T$  לקבלת עץ  $H$ . נבצע פעולת  $insert(x)$  על  $T'$  לקבלת עץ  $H'$ . האם לכל  $x$  הוא העץ המתאים ל- $H$  ע"פ ההתאמה שהוגדרה בשאלה? אם כן הוכיחו, אחרת תנו דוגמה לערך  $x$  עבורו  $H'$  ו- $H$  אינם תואמים.

שימו לב לנספח בעמוד הבא ובו פירוט חמשת מקרי ה- $insert$  של עץ אדום שחור!





נספח לשאלה 1: חמשת מקרי ה-insert של עץ אדום שחור



**שאלה 2 (12 נקודות)**

בשאלה זו נדון במונה בינארי בו עלות פעולה (הוספת או הפחתת) זהה למספר הביטים שאנו משנים תוך כדי ביצוע הפעולה. ראינו בכיתה כי אם נתחיל במצב בו המונה מאופס, ונבצע פעולות increment (הוספה של 1), אזי העלות amortized לפעולה היא  $O(1)$ . עתה נניח כי אנו מבצעים סדרה של  $n$  פעולות increment ו-decrement (הורדת 1) כאשר מתחילים ממונה מאופס.

א. הראו שמבלי להגיע לערכים שליליים במונה, קיימת סדרה בת  $n$  פעולות increment ו-decrement (המתחילה ממונה 0), כך שהעלות amortized של פעולה היא  $\Omega(\log n)$ .

ב. בכדי לשפר את יעילות המונה נשתמש בספרות  $0, +1, -$  (במקום רק ב-0 ו-1). ערכו של מספר

המיוצג ע"י סדרת הספרות  $t_{k-1}, \dots, t_0$  מוגדר להיות:

$$\sum_{i=0}^{k-1} t_i 2^i \quad \text{למשל} \quad \mathbf{10-1} \quad \text{הינו ייצוג של } 3 = 2^0 - 2^1.$$

פעולת increment של מספר בייצוג כזה מתבצעת באופן דומה לבצועה במערכת המספרים הרגילה. מוסיפים 1 לספרה הימנית ביותר, אם ערכה הפך ל-2 הוא משתנה ל-0 וגוררים את העודף לספרה הבאה משמאל. Decrement מתבצע בצורה דומה, מורידים 1 מהספרה הימנית ביותר, אם ערכה הפך ל-2 הופכים אותו ל-0 וגוררים את החוסר (-1) לספרה שמשמאל. כמו קודם נגדיר את עלות הפעולה להיות מספר הספרות המשתנות כאשר מבצעים את הפעולה. הוכיחו בצורה ברורה כי בייצוג שכזה העלות של סדרת פעולות increment ו-decrement כאשר מתחילים ממונה שערכו  $O(n)$ .



**שאלה 3 (12 נקודות)**

ענו על שני הסעיפים הבאים

א. תארו מבנה נתונים התומך בפעולות הבאות על קבוצה  $S$  מתחום סדור מלא

•  $Median(S)$  : מחזיר את החציון ב- $S$  (אם מס' אברים זוגי – חציון תחתון)

•  $Min(S)$  : מחזיר את האבר הקטן ביותר ב- $S$

•  $Max(S)$  : מחזיר את האבר הגדול ביותר ב- $S$

•  $Insert(x,S)$  : מוסיף אבר  $x$  ל- $S$

•  $Delete(x,S)$  מניחים ש- $x$  נמצא לפני הפעולה ב- $S$ . הפעולה מוציאה את  $x$  מ- $S$

על הפעולות  $median, min, max$  לקחת  $O(1)$  זמן במקרה הגרוע, ועל הפעולות  $insert$  ו- $delete$

לקחת  $O(\log n)$  זמן במקרה הגרוע. כמו כן תארו בקצרה כיצד לבצע כל פעולה.

מועד א', גירסה 1

10 מתוך 10

מספר תעודת זהות:

מספר מחברת:

**ב.** שנו במידת הצורך את מבנה הנתונים שהגדרתם בסעיף הקודם כך שנוכל גם למצוא את האלמנט ה- $i$  בגודלו מעל החציון (כלומר ישנם אלמנטים שגדולים מהחציון וקטנים או שווים לאבר זה) בזמן  $O(\log(i))$ . תארו במדויק כיצד לבצע פעולה זו.

מועד א', גירסה 1

11 מתוך 11

מספר תעודת זהות:

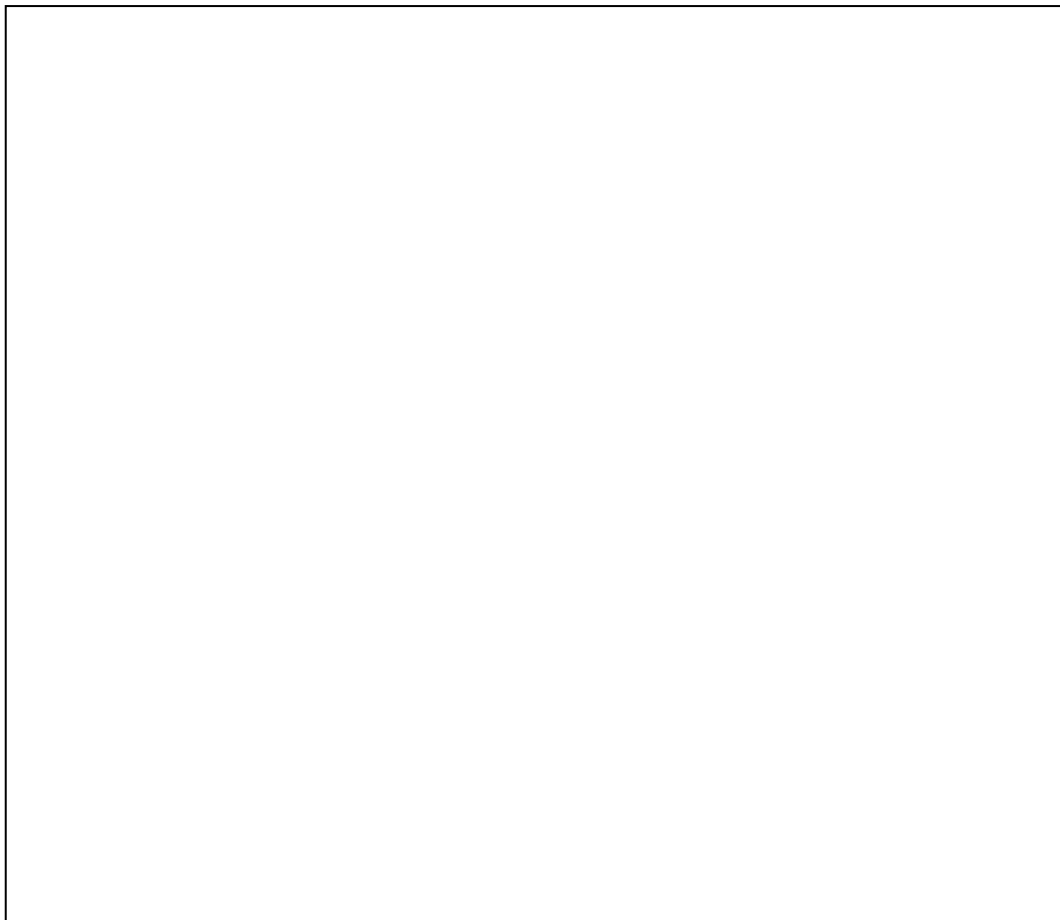
מספר מחברת:

**שאלה 4 (15 נקודות)**

- א. במחרוזת  $S$  מופעה האות א' מיליון פעמים, האות ב' 100000 פעמים והאות ג' 1000 פעמים. ציירו את עץ הפמן של המחרוזת וחשבו את אורך הקידוד של המחרוזת לפי העץ הזה.



- ב. שרטטו את ה-generalized suffix tree של המחרוזות **abba** ו-**bbca**. סמן בעץ את הצומת בו מסתיים החיפוש של המחרוזת **bb**.



מועד א', גירסה 1

12 מתוך 12

מספר תעודת זהות:

מספר מחברת:

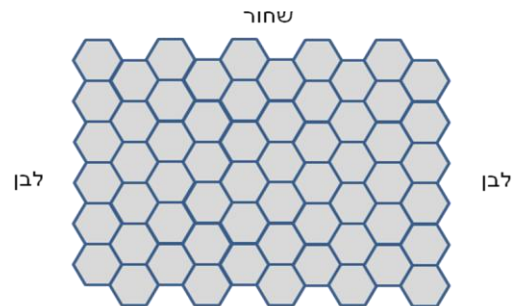
ג. תארו אלגוריתם יעיל למציאת המחרוזת המשותפת הארוכה ביותר של שתי מחרוזות  $s_1$  ו- $s_2$ .

s2. מה סיבוכיות האלגוריתם שתיארתם?

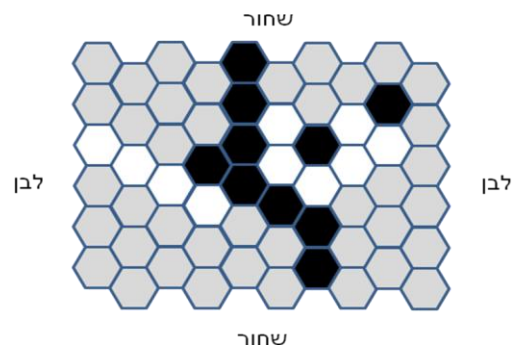


**שאלה 5 (8 נקודות)**

נגדיר משחק הקס שמשוחק על לוח של משושים. למשחק שני שחקנים (שחור ולבן), לכל אחד מהם משויכים שתיים מארבעת צלעות המשחק. כל אחד מהשחקנים מניח בתורו משושה (לבן או שחור) על משבצת פנויה בלוח. מנצח השחקן הראשון שמצליח לחבר את שני הצדדים שלו.



מצב התחלתי



השחור ניצח!

**תכנון** מבנה נתונים להחזקת הלוח כך שניתן יהיה ביעילות לעדכן את הלוח ולבדוק האם יש מנצח במהלך הנוכחי. על זמן העדכון והבדיקה לאחר כל מהלך לקחת  $O(\log n)$  במקרה הגרוע ביותר (כאשר  $n$  הוא מספר המשושים על הלוח). פרט בקצרה באיזה פעולות תומך מבנה הנתונים וכיצד הוא ממומש.

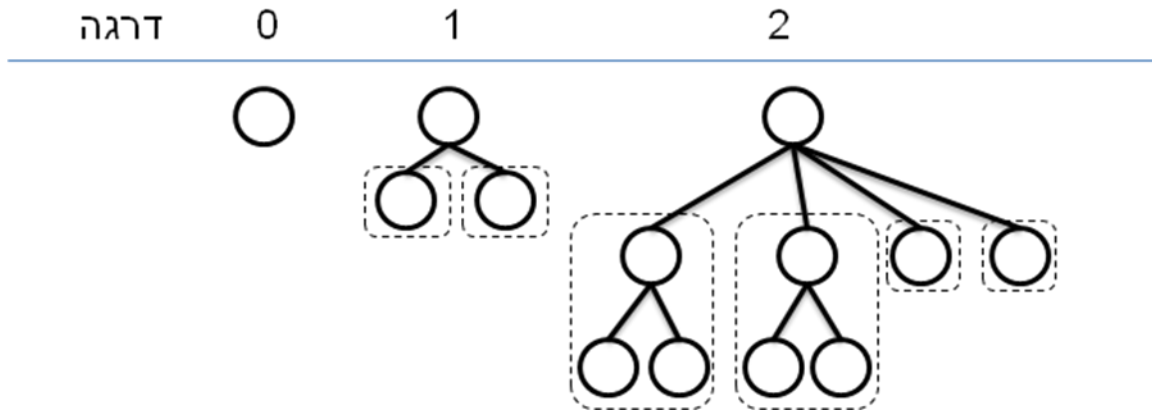
**שאלה 6 (13 נקודות) – שאלה 6 בגרסה 2**

נגדיר עצים בינומיים "שמנים" בצורה הבאה:

עץ בינומי "שמן" מדרגה 0 מכיל צומת אחד בלבד.

עץ בינומי "שמן" מדרגה k ניתן לבנות משלושה עצים בינומיים "שמנים" מדרגת k-1 כאשר נתלה

שניים מהם על העץ השלישי.



א. [6 נק'] תארו מבנה נתונים אנלוגי לערמה בינומית (binomial heap) המשתמש בעצים "שמנים".

ב. [7 נק'] תארו פעולת meld של שתי ערמות בינומיות "שמנות" שהגדרתם בסעיף הקודם.

מועד א', גירסה 1

15 מתוך 15

מספר תעודת זהות:

מספר מחברת:

**שאלה 7 (10 נקודות)**

ממפים  $n$  אלמנטים באמצעות משפחת פונקציות hash אוניברסאלית לטבלה עם  $n^{5/3}$  תאים כאשר פותרים התנגשויות ע"י chaining.

א. מה תוחלת מספר הזוגות  $(x, y)$  כך ש- $x$  ו- $y$  הם אברים בקלט, ושניהם ממופים לאותו תא?

ב. נניח כי הכנסנו את האיברים לטבלה, ומספר ההתנגשויות שקרו בפועל הוא לכל היותר פי 3 מהתוחלת שחישבת בסעיף א; במקרה זה, מה זמן החיפוש בטבלה במקרה הגרוע ביותר?

מועד א', גירסה 1

16 מתוך 16

מספר תעודת זהות:

מספר מחברת:

**שאלה 8 (10 נקודות) – שאלה 1 בגרסה 2**

נתונים  $n$  אלמנטים מתחום סדור במערך  $A$ . ידוע כי קיים אינדקס  $j$  כך שלכל  $i \leq j$  מתקיים  $A[i+1] < A[i]$  ולכל  $i > j$  מתקיים  $A[i] < A[i+1]$ .

דוגמה:  $j=6$

1	2	4	5	6	9	26	15	14	3
---	---	---	---	---	---	----	----	----	---

א. תארו אלגוריתם יעיל למציאת  $j$ .

ב. הוכיחו כי  $\Omega(\log n)$  הוא חסם תחתון על מספר ההשוואות הנדרש למציאת  $j$ .