מבני נתונים – עוד עצים

תרגול 10

ליאור שפירא

תשס״ח

B-trees – תזכורת

- לכל צומת x יש השדות הבאים
  - $n[x]$ מסי' מפתחות ב-x
  - המפתחות עצמם בסדר לא יורד
  - כל צומת פנימי מכיל גם $n[x]+1$ מצביעים לילדי הצומת
  - המפתחות בצומת מפרידים את ערכי ילדי הצומת
- כל העלים בעץ הינם באותו עומק
- יש חסם עליון ותחתון למסי' מפתחות שצומת מכיל
- נבטא חסם זה ע"י $t\geq 2$, הדרגה המינימלית של העץ
  - לכל צומת חוץ מהשורש יש לפחות $t-1$ מפתחות
  - לפיכך, לכל צומת פנימית (חוץ מהשורש) יש לפחות t ילדים
  - בכל צומת יש לכל היותר $2t-1$ מפתחות, ז"א מקסימום $2t$ ילדים
  - צומת תיקרא מלאה אם מכילה בדיוק $2t-1$ מפתחות

הכנסה ל-B-tree

- אופציה א'
  - מצא את הצומת בו אמור להיכנס הערך
  - אם הצומת מלאה פצל אותה וחזור רקורסיבית
- אופציה ב'
  - תוך כדי חיפוש מקום להכניס את הערך החדש נפצל כל צומת מלאה שניתקל בה
    - יתרון: לא נצטרך לגשת פעמיים לצמתים (ייתכן שיושבות בזיכרון יקר לגישה)
    - חסרון: דורש שמס' בנים מכסימלי יהיה 2t (עצי 2-3 אינם B-Trees לפי הגדרה זו)

הכנסה ל-B-tree (אופציה ב')

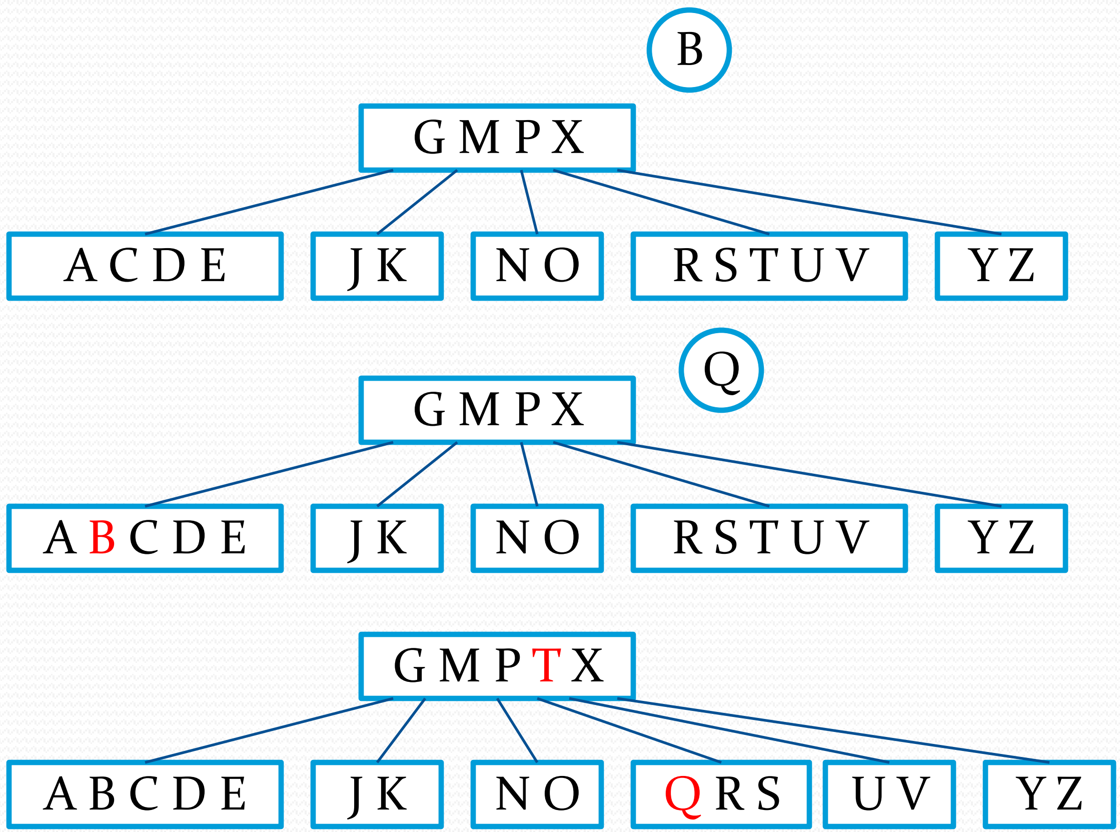
- B-Tree-Insert(T,k)
  - **r**←root[T]
  - If n[r]=2t-1
    - Create new root **s** and split **r** under it
    - B-Tree-Insert-Nonfull(s,k)
  - Else
    - B-Tree-Insert-Nonfull(r,k)

הכנסה ל-B-tree (אופציה ב')

- B-Tree-Insert-Nonfull(**x**,k)
  - i←n[**x**]
  - If leaf[**x**]
    - Find correct place and insert value k
  - Else
    - Find c_i[**x**] - child of **x** into which recursion continues
    - If n[c_i[**x**]]=2t-1
      - Split c_i[**x**]
    - B-Tree-Insert-Nonfull(c_i[**x**],k)

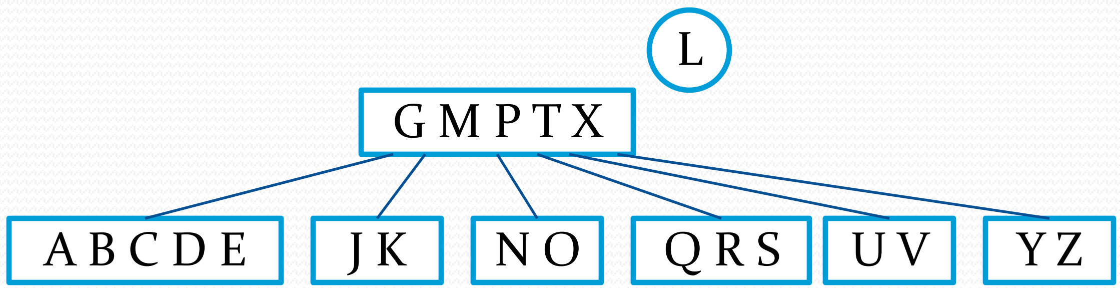
דוגמה – עץ בו t=3

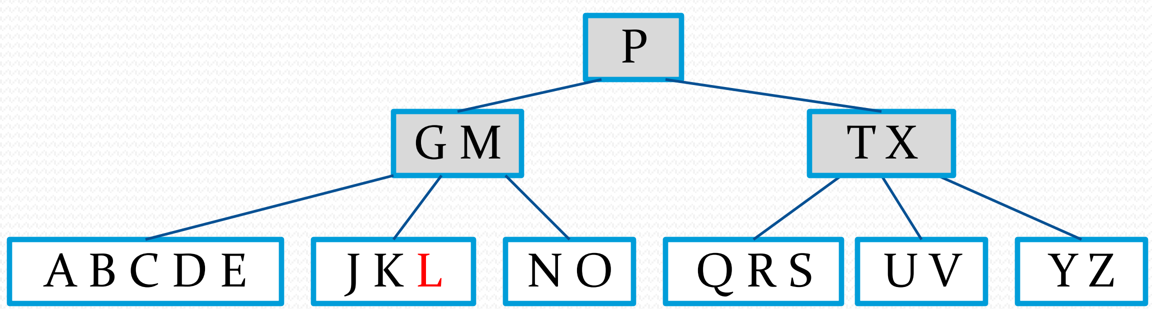
- t=3 ז"א זהו עץ 3-6



דוגמה – עץ בו t=3

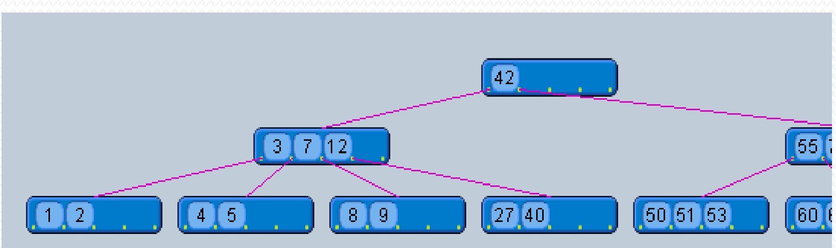
- t=3 ז״א זהו עץ 3-6

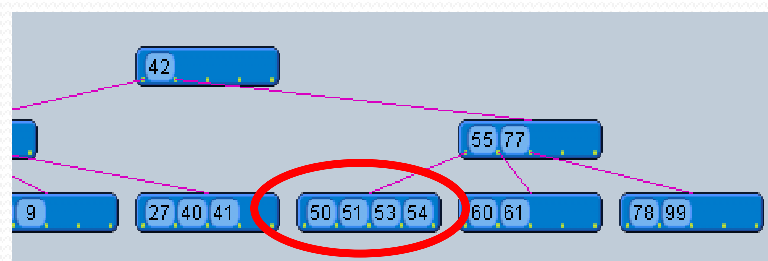




עצי 2-4 (b-trees)

- תרגיל: אם נתחיל מעץ 2-4 ריק ונבצע m פעולות insert, כאשר בכל פעולה נקבל את מיקום ההכנסה, אזי העלות הכללית של הסדרה היא O(m) זמן
- אינטואיציה
  - פעולות זולות – כשיש הרבה "חופש" בעץ
  - פעולות יקרות – כשאין "חופש" בעץ
  - מה מסמל "חופש" בעץ? צמתים בדרגה 2-3

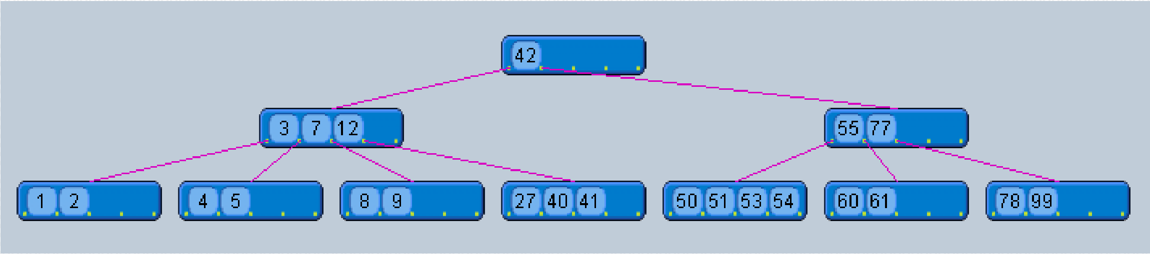




יקר

הוכחה

- נקרא לרמת ה"חופש" בעץ – slack
- נגדיר פונקצית פוטנציאל על פי slack
  - אם אין slack – הפוטנציאל גבוה
  - אם אין slack בצומת – יש 4 ילדים
- פונקצית הפוטנציאל: $\Phi(D)$=#vertices of degree 4



$\Phi=1$

הוכחה

- נצטרך להוכיח שני דברים
  1. פי הפוטנציאל 0 בהתחלה ואי-שלילית בכל שלב
  2. לכל פעולה op מתקיים : $cost(op)+\Delta\Phi=O(1)$
- 1 ברור
- עבור 2 נוכיח כי כל פעולה עולה $O(1)+k$ כאשר k מסי פעולות ה-split שמתבצעות.

הוכחה

- כל split מפצל צומת 4 לצומת דרגה 2 וצומת דרגה 3
- לכן, כל פעולת split (כמעט) מורידה את הפוטנציאל ב-1
  - ה-split הראשון, על עלה, מפצל צומת 0 לשני צמתים מדרגה 0
  - ה-split האחרון מפצל צומת v מדרגה 4 לשני צמתים (2 ו-3) אך אביו עלול להשתנות לדרגה 4 – אין שינוי פוטנציאל
- לכן:
  - $\Delta\Phi \leq -(k-2)$
  - $cost(op)+\Delta\Phi=O(1)$

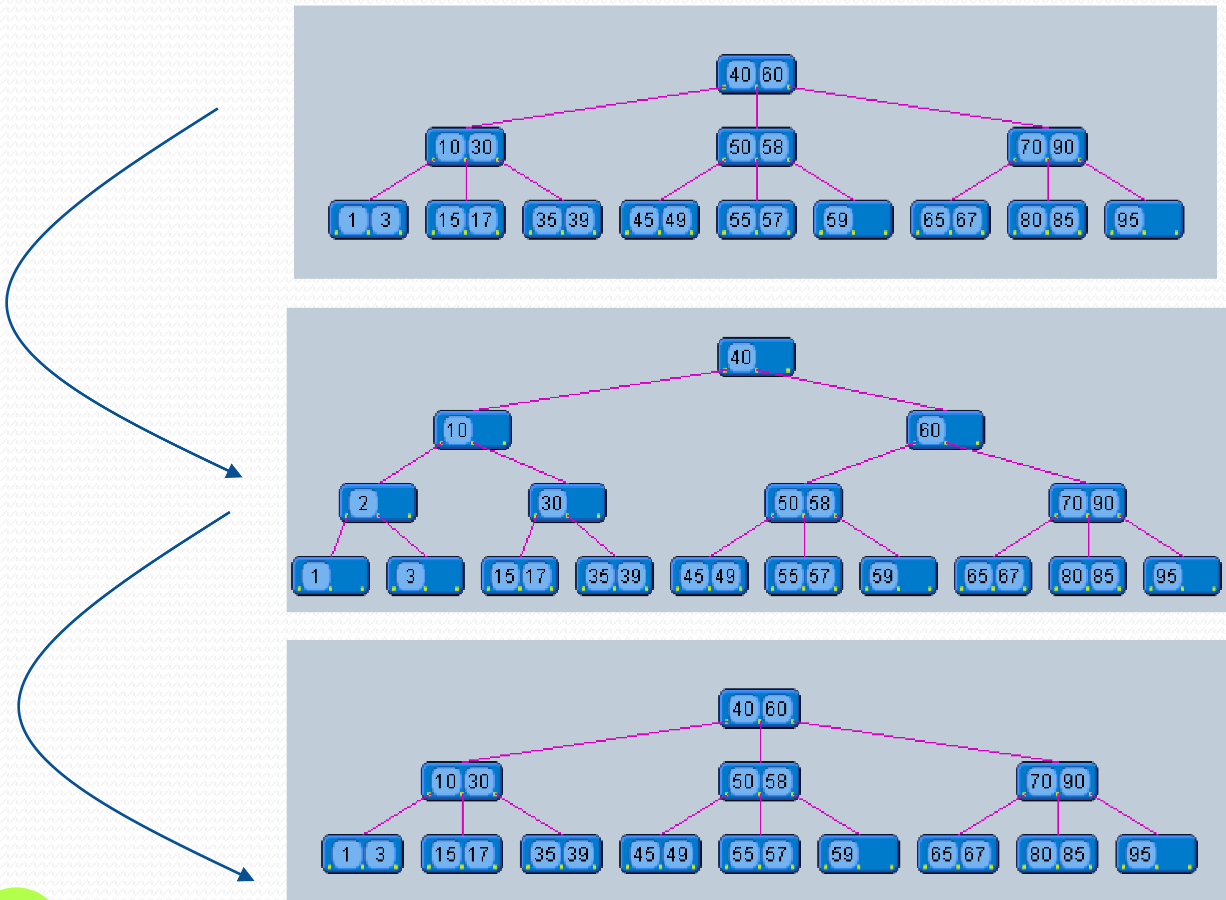
האם זה נכון לעצי 2-3?

- ניתן להראות כי בעצי 2-4 עבור כל סדרת פעולות insert ו-delete, עלות amortized נשארת O(1) לפעולה
- האם הדבר נכון לעצי 2-3?
  - הדבר לא נכון, בעץ 2-3 מלא, אם נבצע סדרת פעולות insert ו-delete של אותו אבר, כל הפעולות יהיו יקרות ולכן O(logn) לפעולה!

האם זה נכון לעצי 2-3?

Insert 2

Remove2

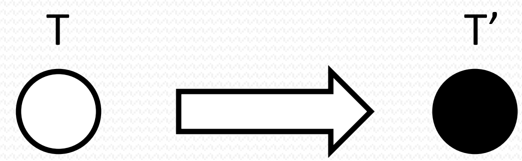


שאלה מתוך מועד א' תשס"ז

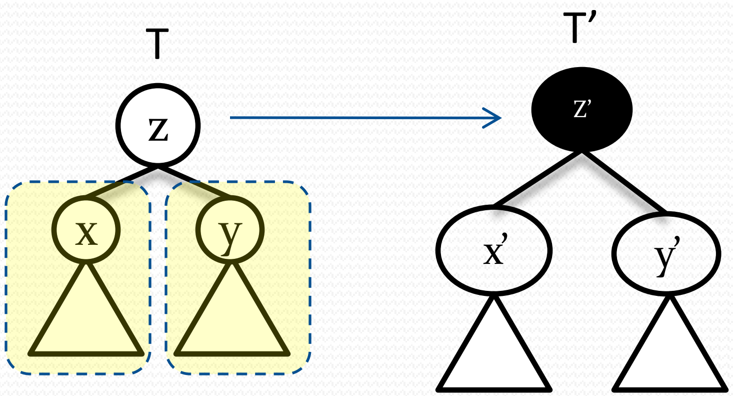
- האם יש שקילות בין עצי אדום שחור לעצי 2-4?
  - האם ניתן להגדיר התאמה שבהינתן עץ 2-4 T הופך אותו לעץ אדום שחור 'T?
  - האם ניתן להגדיר התאמה הפוכה?

שאלה מתוך מועד א' תשס"ז

- בהינתן T עץ 4-2+ נהפוך אותו לעץ אדום שחור 'T כך ש :
  - במידה ו-T מכיל עלה יחיד

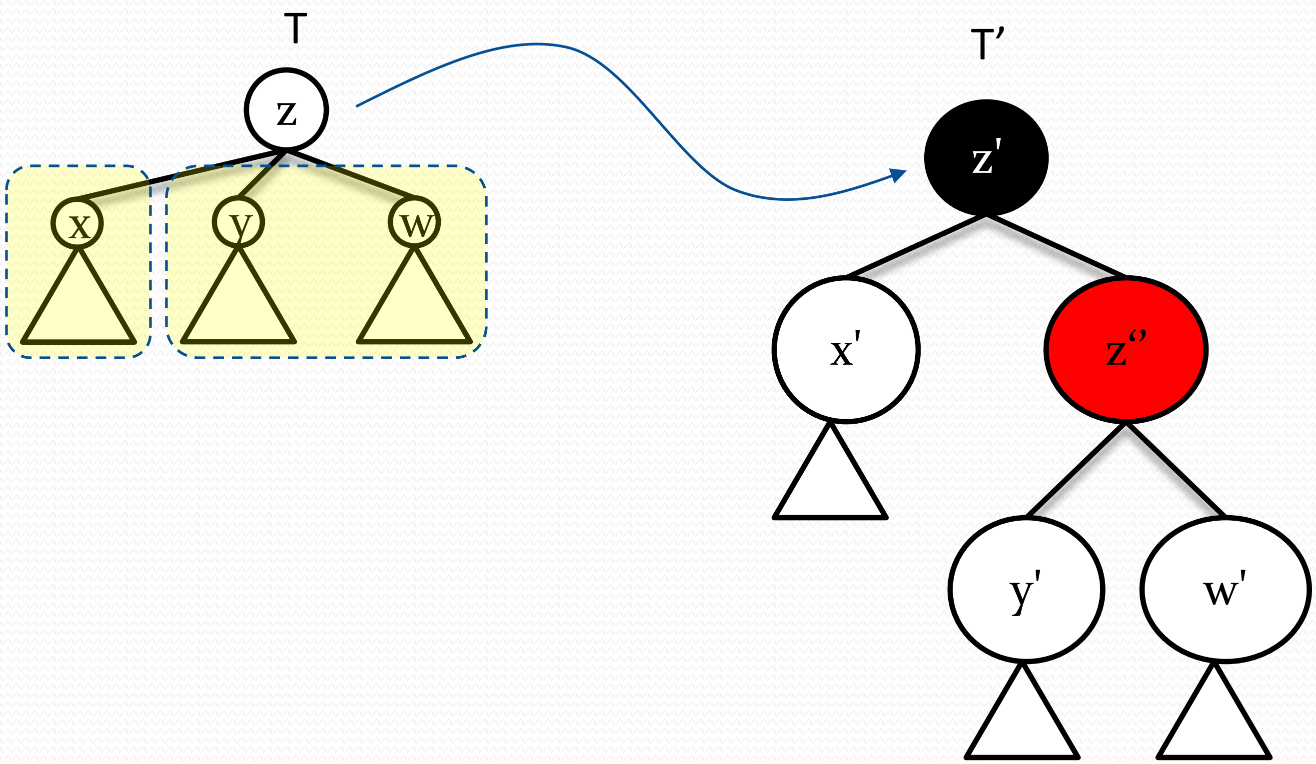


  - עבור T עם שורש z ולו שני בנים x,y אזי



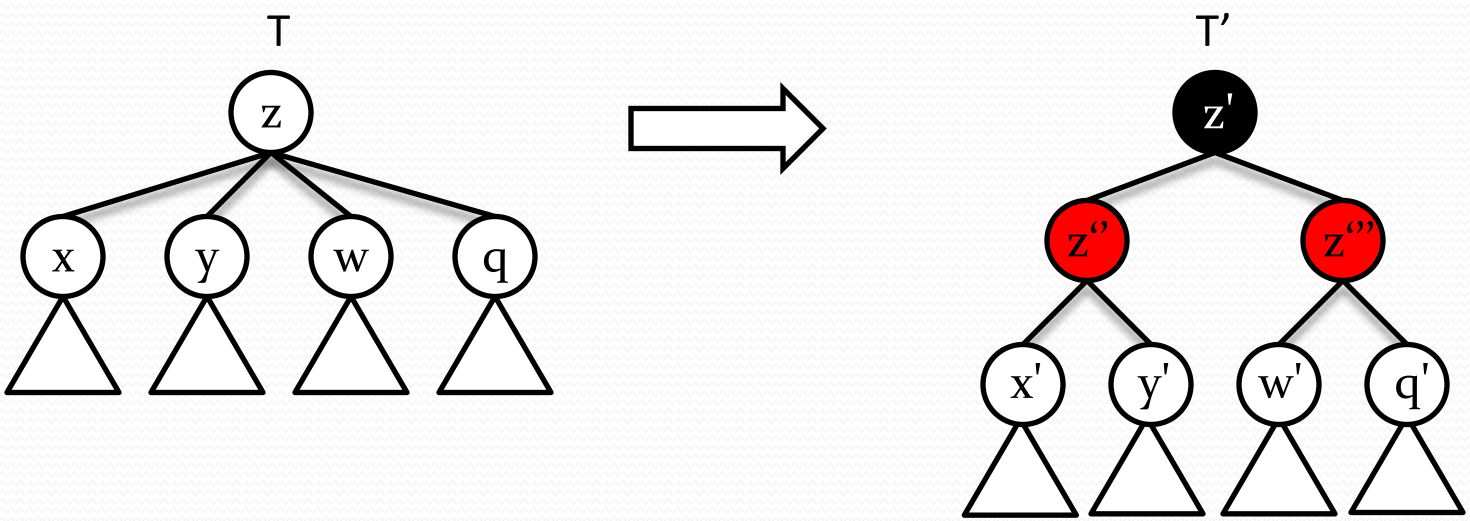
שאלה מתוך מועד א' תשס"ז

- אם ל-z השורש של T יש שלוש בנים אזי



שאלה מתוך מועד א' תשס"ז

- אם ל-z השורש של T יש ארבעה בנים אזי



שאלה מתוך מועד א' תשס"ז

- האם נקבל עץ אדום-שחור חוקי עבור כל קלט?
  - האם נשמר החוק האדום?
  - כן, צמתים אדומים נוצרים רק ב"שכבות ביניים", שורש של כל תת עץ שנתאים רקורסיבית יהיה שחור
  - האם נשמר החוק השחור? האם כל מסלול יכיל את אותו מס' צמתים שחורים?
  - מההגדרה – העומק השחור של עלה ב-T' שווה לעומק של העלה המתאים בעץ 2-4. מכיוון שעומק העלים ב-T שווה, אזי גם ב-T'.

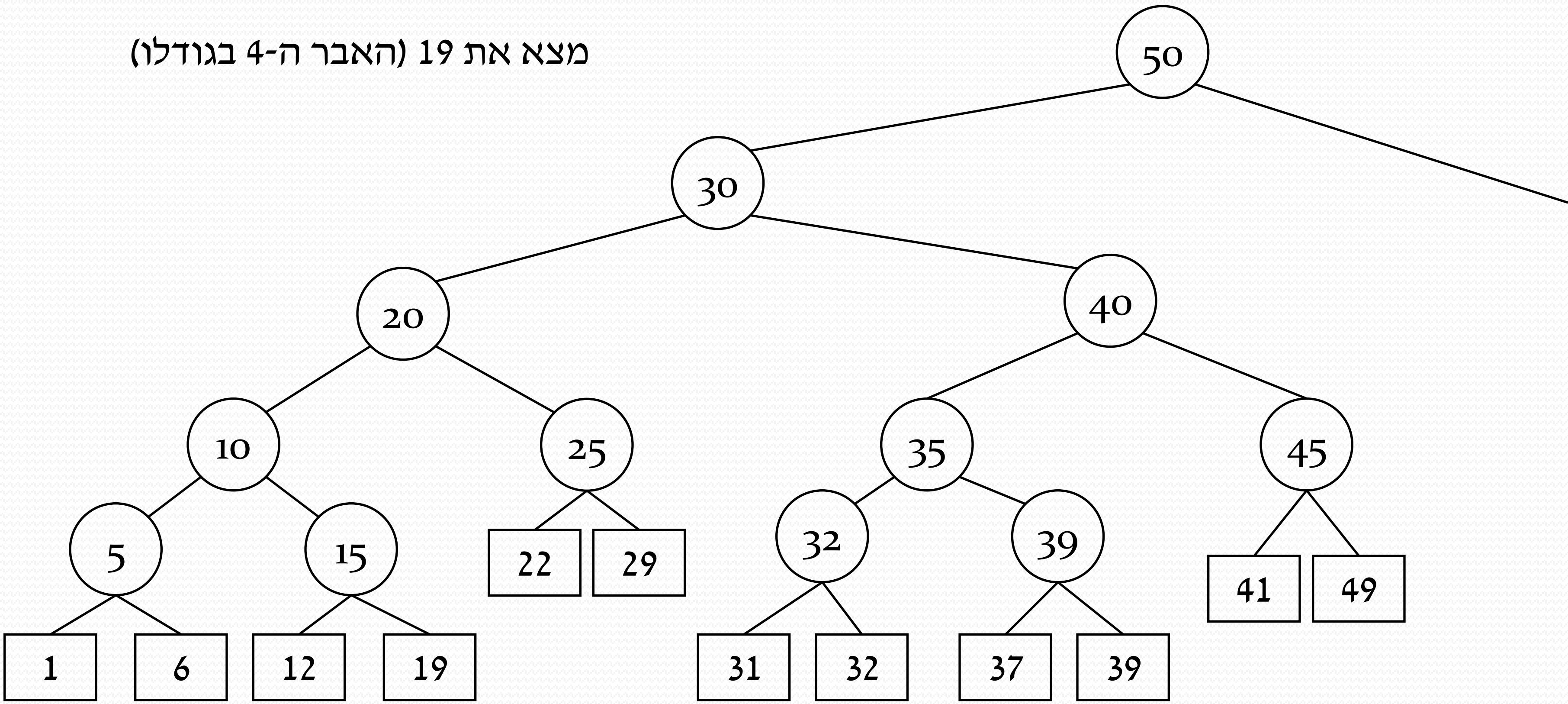
שאלה מתוך מועד א' תשס"ז

- האם ניתן להגדיר התאמה "הפוכה"?
  - יש יותר מפתרון אחד... נסו לפתור בבית

תרגיל

- הראו כי בשינויים קלים למבנה עץ בינארי (מאוזן), ניתן למצוא את האבר ה-k בגודלו, בזמן O(logk)

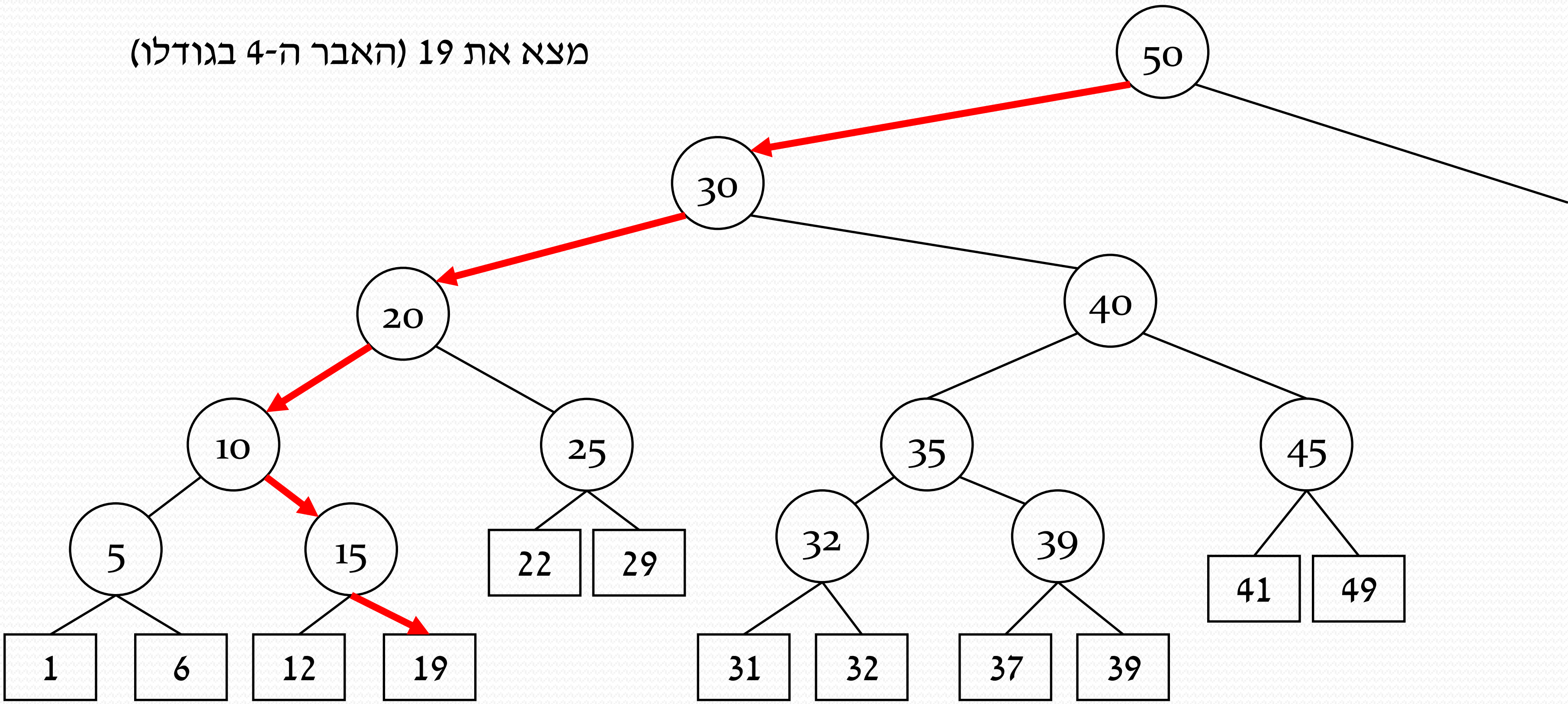
מצא את 19 (האבר ה-4 בגודלו)



תרגיל

- הראו כי בשינויים קלים למבנה עץ בינארי (מאוזן), ניתן למצוא את האבר ה-k בגודלו, בזמן O(logk)

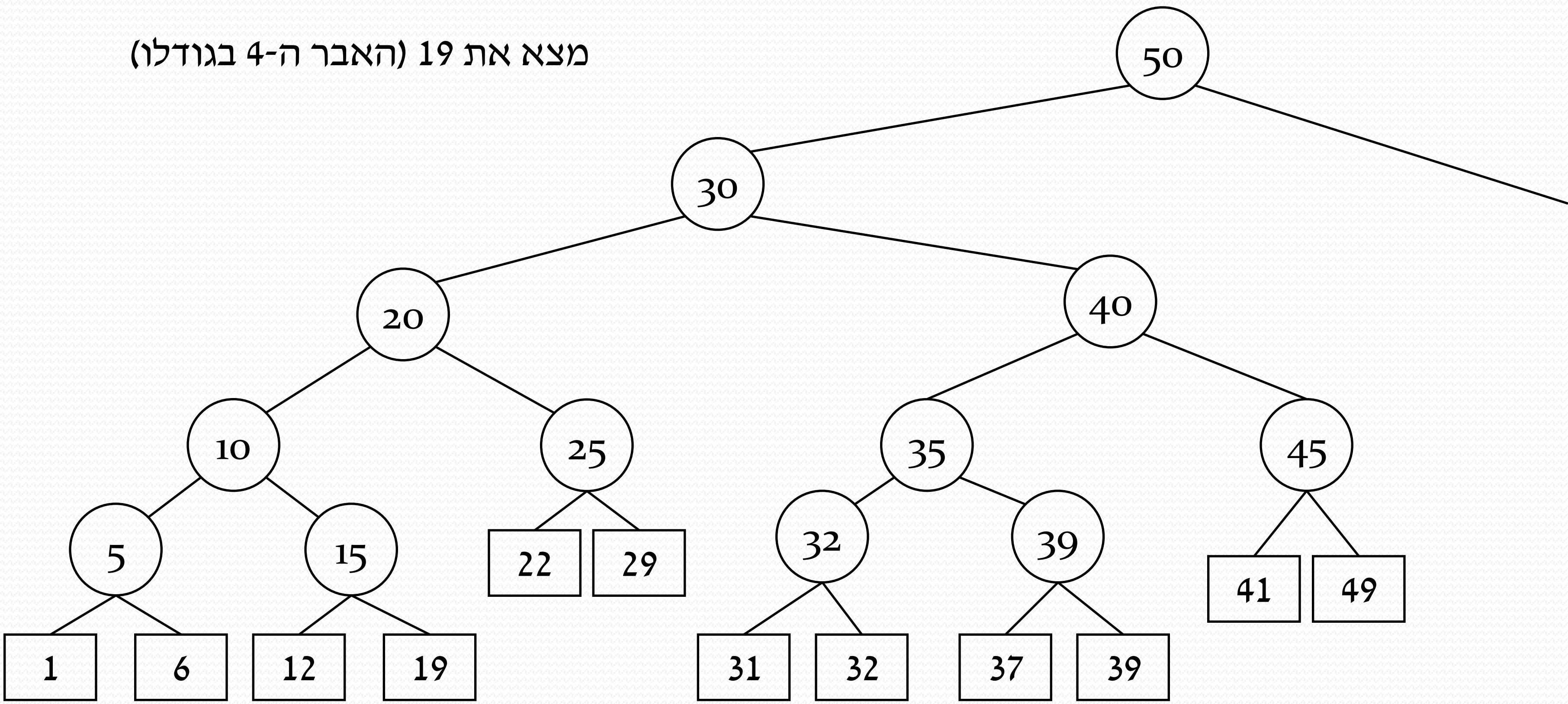
מצא את 19 (האבר ה-4 בגודלו)



תרגיל

- הראו כי בשינויים קלים למבנה עץ בינארי (מאוזן), ניתן למצוא את האבר ה-k בגודלו, בזמן O(logk)

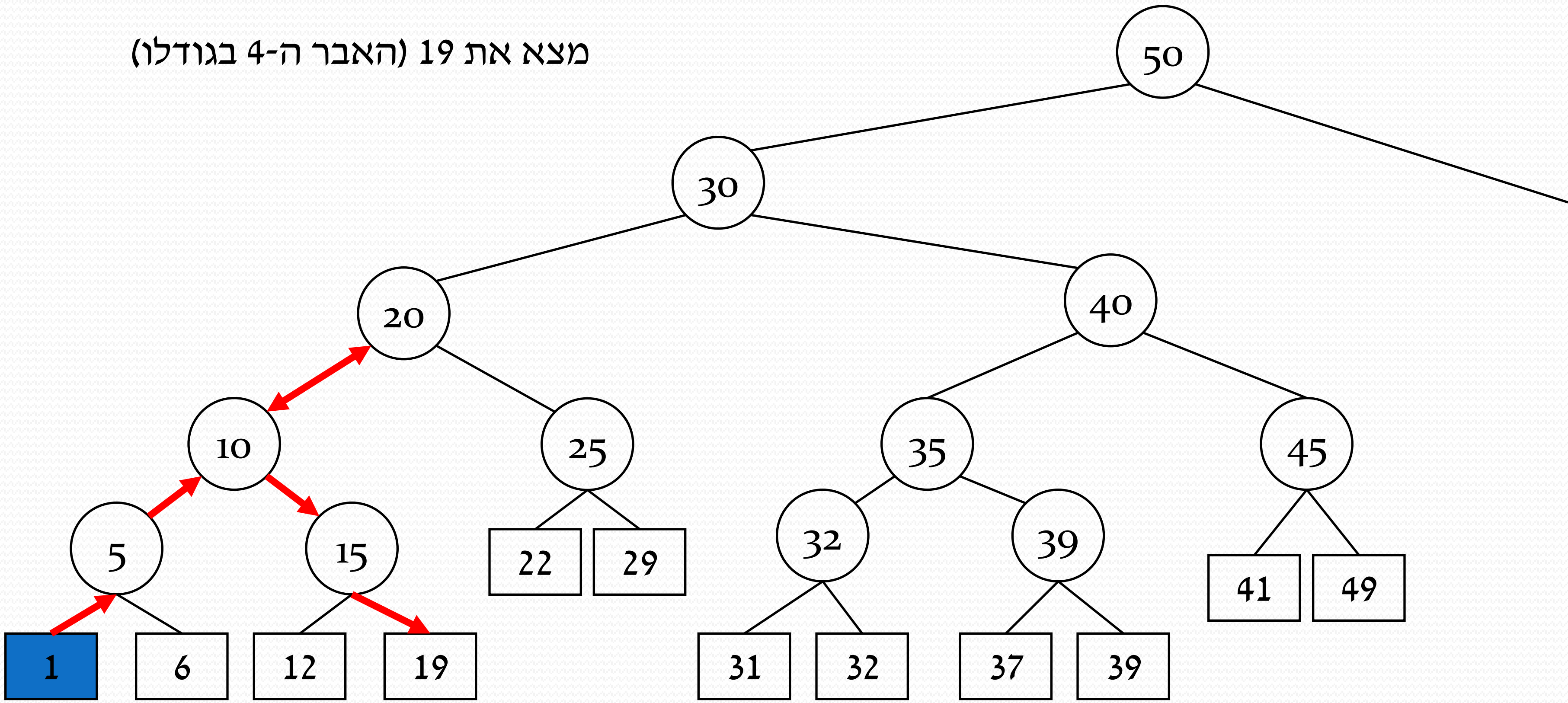
מצא את 19 (האבר ה-4 בגודלו)



תרגיל

- הראו כי בשינויים קלים למבנה עץ בינארי (מאוזן), ניתן למצוא את האבר ה-k בגודלו, בזמן $O(\log k)$

מצא את 19 (האבר ה-4 בגודלו)



תרגיל

- הראו כי בשינויים קלים למבנה עץ בינארי (מאוזן), ניתן למצוא את האבר ה-k בגודלו, בזמן O(logk)
- פתרון: נניח עץ AVL בעל n צמתים

- p← מצביע לעלה השמאלי ביותר (קטן)
- While (p!=root) do
  - p←p.parent
  - If (p.key>x) then
    - x is found in left sub-tree so search there
- End while
- We got to the root so perform regular find

Max. O(logk) iterations

O(k) elements in sub-tree → O(logk) search

הסוף