רקורסיות

ליאור שפירא

רקורסיה

- נקבל ביטוי מהצורה $T(n) = aT(g(n)) + h(n)$
- נרצה למצוא f(n) כך ש- $T(n) = \Theta(f(n))$
- n מספר שלם
- תמיד נחשב עד תנאי עצירה מסוים
- בקורס הזה נתעניין בהתנהגות האסימפטוטית של T ולא בחישוב מדויק

תרגיל 1

- פתרו את הרקורסיה הבאה: $T(n) = 9T(n/7) + n$
- פתרון 1: Brute Force $T(n) = \Theta(f(n))$

$$T(n) = 9T(n/7) + n =$$

$$9(9T(n/49) + n/7) + n = 81T(n/49) + \frac{9n}{7} + n =$$

$$81(9T(n/7^3) + n/49) + \frac{9n}{7} + n = 9^3T(n/7^3) + 9^2\, n/7^2 + 9n/7 + n =$$

$$\ldots$$

$$9^{k+1}T(n/7^{k+1}) + n\underbrace{\left(1 + \frac{9}{7} + \left(\frac{9}{7}\right)^2 + \ldots \left(9/7\right)^k\right)}_{\infty}$$

תרגיל 1

- מה עשינו לא נכון?
  - אי אפשר להמשיך עד אינסוף, צריך לעצור ב-T(1) או קבוע אחר
  - באיזה k נעצור? $\frac{n}{7^{k_0+1}} = 1 \Rightarrow 7^{k_0+1} = n \Rightarrow k_0 = \log_7 n$
  - זהו **עומק הרקורסיה** (ההתפצלות מדרגה 7)
  - ונחזור לביטוי...

$$T(n) = 9^{\log_7 n+1} \cdot T\left(n / 7^{\log_7 n+1}\right) + n\left(1 + \frac{9}{7} + \left(\frac{9}{7}\right)^2 + \ldots \left(9/7\right)^{\log_7 n}\right)$$

$$= \Theta\left(9^{\log_7 n} + n\left(9/7\right)^{\log_7 n}\right) = \Theta\left(n^{\log_7 9}\right)$$

Master Theorem – רקורסיה

- "מתכון" לפתור רקורסיות מסוג מסוים
- עבור נוסחת רקורסיה כך ש $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
- קיימים שלושה מקרים

1. $\exists \varepsilon > 0: \quad f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \quad \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \quad \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

3. $\exists \varepsilon > 0, c < 1: \quad f(n) = O(n^{\log_b a + \varepsilon}), \; af(n/b) \le cf(n) \quad \rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$

חזרה לתרגיל 1

$$T(n) = 9T(n/7) + n$$

- a=9;b=7;f(n)=n
- האם אנחנו במקרה הראשון?

$$\exists \varepsilon : n = O(n^{\log_7 9 - \varepsilon})$$

$$\log_7 9 \approx 1.2$$

$$\varepsilon = 0.1 \Rightarrow n \le n^{1.1} \Rightarrow$$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_7 9})$$

דוגמה נוספת

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 10n$$

$$a = 2, b = 2, \; f(n) = 10n, \log_b a = \log_2 2 = 1$$

$$n^{\log_b a - \varepsilon} = n^{1-\varepsilon} \Rightarrow 10n = O(n^{1-\varepsilon})?$$

$$n^{\log_b a} = n \Rightarrow 10n = \Theta(n)?$$

מסקנה: זהו מקרה 2

תרגיל 2

- פתרו את הרקורסיה הבאה: $T(n)=\sqrt{n}T(\sqrt{n})+n$
- פתרון
  - האם מתאים ל-master theorem?
    - לא
  - ננסה לפתור בצורה ישירה

$$T(n)=\sqrt{n}T(\sqrt{n})+n$$

$$T(n)=\sqrt{n}(\sqrt{\sqrt{n}}T(\sqrt{\sqrt{n}})+\sqrt{n})+n$$

$$T(n)=\sqrt{n}(\sqrt{\sqrt{n}}(\sqrt{n}(\sqrt{\sqrt{\sqrt{n}}}T(\sqrt{\sqrt{\sqrt{n}}})+\sqrt{\sqrt{n}})+n)+\sqrt{n})+n$$

  - לא נראה רעיון כזה טוב

תרגיל 2 $T(n)=\sqrt{n}T(\sqrt{n})+n$

- רמז: איננו מעונינים בפתרון מדויק, אלא בהערכה, סדר גודל.
- רמז: ננסה לפתור עבור ח'ים ספציפיים, מסוג מסוים.
- למשל $n=2^{2^m}$
- עבורו

$$T(2^{2^m})=\sqrt{2^{2^m}}T(\sqrt{2^{2^m}})+2^{2^m}$$

$$=2^{2^{m-1}}T(2^{2^{m-1}})+2^{2^m}$$

$$=m\cdot 2^{2^m}$$

ערך בכל חזרה

חזרות

$$(n=2^{2^m} \rightarrow m=\log\log n)$$

$$=n\log\log n$$

תרגיל 3

- פתרו את הרקורסיה הבאה: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\log^2 n$
- פתרון
  - בואו ננסה לפתוח את זה קצת...

$$T(n) = n\log^2 n + n\log^2(\frac{n}{2}) + n\log^2(\frac{n}{4}) + n\log^2(\frac{n}{8}) + \ldots$$

  - נמצא חסם משני הצדדים

תרגיל 3

- חסם תחתון
  - בואו נשמור רק את חצי האברים הגדולים ביותר
  - מיהו האבר הקטן ביותר ששמרנו?

$$\frac{n}{2^{\log n/2}} = n\cdot\sqrt{\frac{1}{2^{\log n}}} = n\cdot\sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

  - לכן אם נחליף את n/k בשורש n נקבל...

$$T(n) \geq \frac{\log n}{2} n\log^2\sqrt{n} = \frac{\log n}{2} n(\frac{1}{2}\log n)^2 = \frac{n\log^3 n}{8}$$

$$T(n) = \Omega(n\log^3 n)$$

תרגיל 3

- חסם עליון
  - נחליף כל n/k ב-n ונקבל

$$T(n) \le n\log^2 n + n\log^2(n) + n\log^2(n) + n\log^2(n) + \ldots$$

$$= \log n \cdot n\log^2(n) = n\log^3 n$$

$$T(n) = O(n\log^3 n)$$