מבני נתונים 08a

תרגול 15

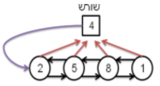
27/3/2008

Union find + הופמן

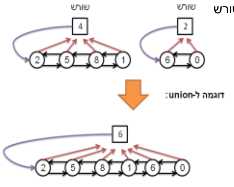
ליאור שפירא

שאלה ב-union find

- להלן מבנה נתונים ל-union find:
  - כל קבוצה תוחזק ברשימה משורשרת דו-כיוונית, כל אלמנט מצביע לצומת מיוחד (שורש) המייצג את הקבוצה

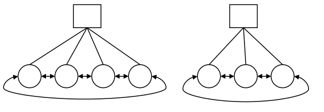


  - Find מקבלת מצביע ומחזירה מצביע לשורש
  - Union מוסיפה קב' קטנה לגדולה ומעדכנת את השורש



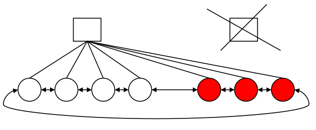
שאלה ב-union find

- כמה זמן תיקח סדרת m פעולות כאשר נתחיל מאוסף של n קבוצות בעלות אבר אחד (כל אחת). הנח $m>n$
- תשובה
  - נתבונן בסדרה כלשהיא בת m פעולות
  - כל פעולת find לוקחת $O(1)$ ולכן סה"כ $O(m)$
  - כל פעולת union פרופורציונאלית למס' האברים שמשנים את שורש הקב' המכילה אותם



שאלה ב-union find

- כמה זמן תיקח סדרת m פעולות כאשר נתחיל מאוסף של n קבוצות בעלות אבר אחד (כל אחת). הנח $m>n$
- תשובה
  - נתבונן בסדרה כלשהיא בת m פעולות
  - כל פעולת find לוקחת $O(1)$ ולכן סה"כ $O(m)$
  - כל פעולת union פרופורציונאלית למס' האברים שמשנים את שורש הקב' המכילה אותם



שאלה ב-union find

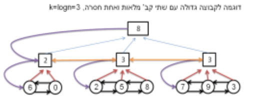
- כמה זמן תיקח סדרת m פעולות כאשר נתחיל מאוסף של n קבוצות בעלות אבר אחד (כל אחת). הנח $m>n$
- תשובה
  - נתבונן בסדרה כלשהיא בת m פעולות
  - כל פעולת find לוקחת $O(1)$ ולכן סה"כ $O(m)$
  - כל פעולת union פרופורציונאלית למס' האברים שמשנים את שורש הקב' המכילה אותם
  - לכן אם נחסום לכל אבר את מס' הפעמים שמשתנה השורש אליו הוא מצביע ונסכם על כל האיברים, נקבל חסם על העלות הכוללת של פעולות ה-union.

המשך תשובה

- נתבונן באבר x. בכל פעם שמשתנה השורש אליו הוא מצביע, גודל הקבוצה בה x נמצא מוכפל בלפחות 2. מאחר וגודל קב' קטן שווה לח מס' הפעמים שמצביע השורש של n יכול להשתנות חסום ע"י logn
- נסכם עבור כל האברים ונקבל חסם כללי $O(n\log n)$ על העלות הכללית של פעולות ה-union.
- סה"כ אם נסכם נקבל עלות כללית $O(n\log n+m)$

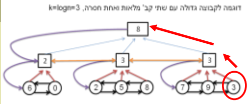
חלק שני

- נסמן $k = \lfloor \log n \rfloor$
- קבוצות שגודלן k לכל היותר נייצג כמו קודם
- קבוצה S בגודל גדול מ-k תיוצג ע"י אוסף של תת קבוצות בגודל k בדיוק (נקרא להן **מלאות**), וקבוצה אחת לכל היותר בגודל קטן מ-k (**חסרה**).
  - תתי קבוצות אלו מיוצגות כמו שתואר בחלק א' של השאלה.
  - שורשי תת הקבוצות מסודרים ברשימה משורשרת דו-כיוונית ומצביעים לצומת חדש המייצג את הקבוצה כולה.
  - שורש זה מכיל מצביע לרשימת שורשי תתי הקבוצות ואת גודל הקבוצה.
  - הקבוצה החסרה (אם קיימת) תהיה תמיד ראשונה ברשימה.



איך מוגדרות הפעולות?

- Find ימצא את שורש תת הקב' המאוכסן בצומת המייצג את האבר ומשם את שורש הקבוצה הגדולה



- Union יתבצע באופן הבא
  - שתי קב' קטנות שגודלן יחד פחות מ-k נאחד כמו בסעיף הקודם
  - אם גודלן יחד גדול מ-k נאחד לקבל קב' אחת מלאה ואחת חסרה. ניצור קב' חדשה שאלה תתי הקב' שלה
  - אם אחת קטנה ואחת גדולה, נאחד את הקטנה עם הקב' החסרה של הגדולה, ונוסיף את תתי הקב' המתקבלות לקב' הגדולה
  - אם שתי הקב' גדולות נעביר את המלאות מהקב' עם פחות אלמנטים לקב' עם יותר אלמנטים ונאחד את החסרות

חלק שני

- מה זמן הריצה של סדרה בת m פעולות כאשר נתחיל מאוסף של n קבוצות, כל אחת מכילה רק אבר יחיד?
- תשובה
  - נתבונן בסדרה שרירותית בה m פעולות
  - עלות find כמו קודם – O(m)
  - כדי לחסום את עלות ה-union, נחסום את מס' הפעמים שאלמנט משנה את "מצביע תת קבוצה" שלו, ואת מס' הפעמים שתת קבוצה מלאה משנה את "מצביע הקבוצה" שלה
  - נתבונן באלמנט x, כל פעם שהוא משנה מצביע תת קבוצה, גודל התת קבוצה שהוא בתוכה גדל בלפחות פע 2. מאחר שגודל תת קבוצה אינו עולה על logn, מס' הפעמים שx יכול לשנות מצביע תת קבוצה חסום ע"י loglogn.
  - אם נסכום על כל האברים, מספר הפעמים שאלמנט כלשהוא משנה את מצביע התת קבוצה שלו הוא nloglogn.

המשך תשובה

- נותר לחסום את מספר הפעמים שתת קב' מלאה משנה את מצביע הקבוצה שלה.
- בכל פעם שתת קבוצה y משנה את מצביע הקבוצה שלה, גודל הקבוצה בה y נמצאת גדל בלפחות פי 2.
- מאחר וגודל קב' הוא לכל היותר n, מספר הפעמים שתת קבוצה y משנה מצביע הקבוצה שלה חסום ע"י logn.
- המספר הכולל של תת קבוצות הוא לכל היותר n/logn ולכן סה"כ שינויי מצביעי קבוצות בתת קבוצות הוא

$$\frac{n}{\log n}\log n = n$$

- נסכם סה"כ לכל פעולות union: O(n+nloglogn)=O(nloglogn)
- נשים לב שבכל פעולת union , רק תת קבוצה חסרה אחת יכולה לשנות מצביע קבוצה ולכן סה"כ עלות זו O(n).
- ולכן סה"כ עלות סדרת הפעולות: O(nloglogn+m)

Prefix codes & Huffman

Prefix Codes

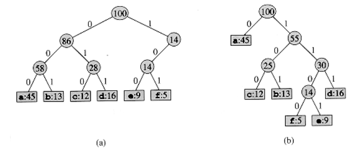
- נניח א"ב של 6 תווים שכל אחד מופיע בתדירות מסוימת
- קידוד אורך קבוע
  - אם נייצג כל תו במס' ביטים שווה נזדקק ל...3 ביטים
  - עבור קובץ של 100000 תווים נזדקק ל...300000 ביטים
- קידוד אורך משתנה (variable length code)
  - תווים שחוזרים הרבה נייצג במעט ביטים (וההפך)

	a	b	c	d	e	f
Freq.	45	13	12	16	9	5
Fixed encoding	000	001	010	011	100	101
Variable encoding	0	101	100	111	1101	1100

  - עבור אותו קובץ נזדקק ל...224000 ביטים (25% חסכון)

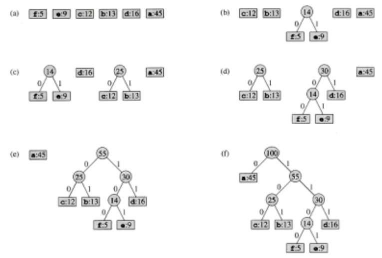
Prefix Codes

- נגדיר קודים כך שאף קוד לא משמש כ-prefix לקוד אחר
- הדבר יקל על encoding/decoding
- ניתן לייצג קוד ע"י עץ בינארי
- קוד אופטימאלי **תמיד** מיוצג ע"י עץ בינארי מלא



קוד הופמן

- הומצא ב-1951 ע"י הסטודנט David Huffman בתור מטלה לקורס תיאוריית המידע
- זהו אלגוריתם חמדני הבונה עץ של prefix code מלמטה למעלה



קוד הופמן

- משפט 1
  - אם S מחרוזת ו-C_H קוד הופמן שלה, ו-C הוא Prefix Code אחר. אזי $|C_H(S)| \le |C(S)|$

Huffman הוא קידוד Prefix Code אופטימאלי

קוד הופמן ואנטרופיה

- משפט 2
  - עבור כל מחרוזת S מתקיים

$$H_0(S)\cdot n \le |Huff(S)| \le (H_0(S)+1)\cdot n$$

"גודל ממוצע של קידוד" הוא בין $H_0(S)$ ל-$H_0(S)+1$

- משפט 3
  - עבור כל אלגוריתם כיווץ A תהיה מחרוזת S כך ש $|A(S)| \ge n\cdot H_0(S)$

אין אלג' כיווץ שמסוגל לכווץ כל מחרוזת לפחות מ-$nH_0(S)$

קוד הופמן ואנטרופיה

- הוכחה (משפט 2)
  - בהינתן S נגדיר Prefix Code C כך ש- $|C(S)| \le (H_0(S)+1)\cdot n$
  - נגדיר את הקוד כך:
    - את התו a_i הקוד C יקודד בעזרת מחרוזת ביטים באורך $\left\lceil \log_2(\frac{n}{n_i}) \right\rceil$
  - נניח קיים קוד כזה, אזי:

$$\begin{aligned}
|C(S)| &= n_1(<\text{Coding Size}>a_1)+\ldots+n_k(<\text{Coding Size}>a_k)\\
&= \sum_{i=1}^{k} n_i \left\lceil \log_2(n/n_i) \right\rceil \le \sum_{i=1}^{k} n_i(\log_2(n/n_i)+1)\\
&= \sum_{i=1}^{k} n_i(\log_2(n/n_i)) + \sum_{i-1}^{k} n_i\\
&= n\cdot H_0(S)+n = (H_0(S)+1)\cdot n
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |Huff(S)| \le (H_0(S)+1)\cdot n$$

קוד הופמן ואנטרופיה

- טענה 1 (בדרך להוכחת משפט 3)
  - לא קיים אלגוריתם כיווץ A כך ש $\forall S, |S|=n : |A(S)| \le n-1$
- הוכחה
  - אלגוריתם כיווץ הינו פ' חד-חד ערכית
  - נניח קיימת פ' כזו, אזי היא פ' חח"ע מקבוצה בגודל 2^n לקבוצה בגודל 2^{n-1}
  - אין פונקציה כזו ולכן לא קיים אלגוריתם כזה

קוד הופמן ואנטרופיה

- הוכחה (משפט 3) - ההתחלה
  - נקבע $n_1,\ldots,n_k$ ואת n לערכים מסוימים
  - כמה מחרוזות כאלה יש?

$$X := \binom{n}{n_1, n_2, \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

- טענה 2
  - אין אלגוריתם שמכווץ כל מחרוזת מקבוצה בת X מחרוזות לפחות מ-log(X) ביטים
- הוכחה (טענה 2)
  - הדבר יגדיר פונקציה חח"ע מקבוצה בגודל X לקבוצה בגודל > $X = 2^{\log X}$
  - בסתירה לטענה 1, ולכן הטענה נכונה

קוד הופמן ואנטרופיה

- אזי log(X) חסם תחתון על הכיווץ
- נחשב את log(X): נשתמש בהערכה ש- $\log(m!) \approx m \log m$

$$\log X = \log \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!} = \log n! - \log n_1! - \log n_2! - \ldots \log n_k!$$

$$\approx n \log n - n_1 \log n_1 - n_2 \log n_2 - \ldots n_k \log n_k$$

$$= (n_1 + n_2 + \ldots n_k) \log n - n_1 \log n_1 - n_2 \log n_2 - \ldots n_k \log n_k$$

$$= n_1 \log n + n_2 \log n + \ldots n_k \log n - n_1 \log n_1 - n_2 \log n_2 - \ldots n_k \log n_k$$

$$= n_1 \log \frac{n}{n_1} + \ldots n_k \log \frac{n}{n_k}$$

$$= n\mathrm{H}_0(S)$$

הוכחנו את משפט 3. מש"ל

תם הטקס – נגמר הקורס - הסוף