מבני נתונים – תרגול 2 – תשס"ח סמסטר א' – ליאור שפירא

מומלץ להסתכל בקורמן פרק 17

## שיטת הבנק

- $\hat{c}_i = c_i + deposit - withdraw$
- $\sum \hat{c}_i \geq \sum c_i$

## שיטת הפוטנציאל

- $\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$
- $\sum \hat{c}_i = \sum c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = \sum c_i + \Phi(D_n) - \Phi(D_0)$
- $\Phi(D_n) - \Phi(D_0) \geq 0 \Rightarrow \sum \hat{c}_i \geq \sum c_i$

## דוגמה – מונה בינארי

מונה מייצג מספר שלם אי-שלילי, מיוצג ע"י מערך אינסופי A של ביטים. הפעולה היחידה המותרת היא increment המגדילה את המונה ב-1.

- סיבוכיות worst case של פעולה היא logn עבור מס' n (מס' הביטים הנדרשים לייצג)
- בשיטת הבנק
  - נשלם 2 מטבעות עבור הפיכת 0 ל-1 (פעולה זולה), ונשלם 0 מטבעות עבור הפיכת 1 ל-0 (פעולה יקרה)
  - תמיד יש מספיק בבנק מאחר ונצטרך מטבע מהבנק כדי להפוך 1 ל-0, אך ודאי הפכנו קודם ביט זה מ-0 ל-1 ולכן הפקדנו עבורו מטבע בבנק
- בשיטת פוטנציאל
  - הפוטנציאל לאחר הפעולה ה-i הוא מס' הביטים הדלוקים לאחר הפעולה
  - מחיר הפעולה ה-i הוא מס' הביטים שהופכת ל-0 ועוד אחד (ביט הכי שמאלי מ-0 ל-1)
  - אם הפוטנציאל 0 ז"א הפעולה האחרונה איפסה את כל הביטים $b_{i-1} = t_i = k$

    אחרת $b_i = b_{i-1} - t_i + 1$
  - בהכרח כעת $b_i \leq b_{i-1} - t_i + 1 \Rightarrow \Delta\Phi \leq (b_{i-1} - t_i + 1) - b_{i-1} = 1 - t_i$
  - ולכן $\hat{c}_i = c_i + \Delta\Phi \leq (t_i + 1) - (1 - t_i) = 2$

## דוגמה – מערך מתנפח

מומלץ להסתכל בקורמן פרק 17 (17.4.1)

מערך של מספרים שלמים עם פעולת append המוסיפה אבר בתא הפנוי הבא. המערך כל הזמן בגודל N והתא הפנוי הבא הוא אינדקס t. כאשר מוסיפים אבר והמערך כבר מלא מקצים מערך חדש בגודל פי 2 ומעתיקים אליו את כל התאים.

### שיטת הבנק

פעולה זולה: כאשר דוחפים אבר חדש למערך משלמים 3 מטבעות, אחת על הפעולה, אחד לבנק על התא שדחפנו אליו ואחד עבור תא שעוד אין עליו מטבע

פעולה יקרה: כאשר יש צורך להעתיק את כל אברי המערך למערך חדש גדול פי2

מדוע זה עובד? צריך להוכיח

- המאזן לעולם אינו שלילי
- יש מספיק מטבעות לשלם עבור "הכפלת" המערך

ניתן להוכיח באינדוקציה שאחרי i הכנסות למערך לאחר העתקה יש 2i מטבעות בבנק. הוצאנו עד 3 מטבעות לכל פעולה ולכן עלות ממוצעת לפעולה קבועה.

### שיטת הפוטנציאל

נגדיר פוטנציאל של המערך

$$\Phi(S)=\begin{cases}2(t+1)-N & if\ \ 2(t+1)-N>0\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

מה העלות amortized של הפעולות?

עבור פעולה "זולה" (אין העתקה): $\hat{c}_i=c_i+\Delta\Phi=1+(2(t+2)-N)-(2(t+1)-N)=3$

עבור פעולה "יקרה" (יש העתקה):

$$\begin{aligned}\hat{c}_i&=c_i+\Delta\Phi\\&=(N+1)+\Delta\Phi\\&=(N+1)+0-(2(N+1)-N)\\&=N+1-(N+2)=3\end{aligned}$$

ולכן כל פעולה לוקחת זמן ממוצע קבוע במקרה הגרוע ביותר.