

## מבחן במתמטיקה בדידה

מרצה: פרופ' י. רודיטי

סימונים:  $N, Q, R$  יסמנו את קבוצות המספרים הטבעיים, הרציונלים והממשיים בהתאמה.

כללי – הבחינה: 1. מותר להשתמש בכל חומר עזר.

2. בבחינה 6 שאלות. תשובה נכונה מזכה את הכותב ב- 20% .  
למניית הנקודות הסופי תילקחנה 4 שאלות שלהן הניקוד המרבי. ניקוד שתי השאלות הנותרות יסוכם, יחולק ב-2-ויתווסף לסך הנקודות שנצברו ב- 4 השאלות הקודמות.  
נא לקרוא בעיון את השאלות

**ב ה צ ל ח ה !**

### שאלה 1

- I. (14%) נסמן:  $x$  – הפסוק: "יהי שרב"  
 $y$  – הפסוק: "אלך לטייל רגלי"  
 $z$  – הפסוק: "יהיה לי פנאי"  
הצרינו את המשפטים הבאים וקבעו את ערך האמת שלהם כאשר:  
 $x$  – אמת,  $y$  – שקר,  $z$  – אמת.  
(א) אם לא יהיה שרב ויהיה לי פנאי, אלך לטייל רגלי.  
(ב) לא אלך לטייל רגלי, אם ורק אשר יהיה שרב ולא יהיה לי פנאי.
- II. האם הפסוקים  $A \rightarrow B$  ו-  $A \rightarrow C$  גוררים את  $B \rightarrow C$  ? נמקו!

### שאלה 2

- א. תהי  $P$  – קבוצה של נקודות במישור.  $L$  – קבוצה של ישרים.  
נגדיר 2 אכסיומות: (I) כל שתי נקודות שונות קובעות ישר יחיד.  
(II) כל שני ישרים שונים נחתכים בנקודה אחד בלבד.  
יהיו:  $l_1, l_2 \in L$ ,  $l_1 \neq l_2$  (ישרים שונים). תהי  $A \notin l_1, l_2$  (נקודה שאינה על  $l_1$  ואינה על  $l_2$ ). נגדיר התאמה:

$$f_A: l_1 \rightarrow l_2$$

באופן:  $\forall X \in l_1, f_A(x) = AX \cap l_2$   
כאשר,  $AX$  הוא הישר הנקבע ע"י הנקודות  $A$  ו-  $X$ .  
הוכיחו כי  $f$  היא פונקציה חח"ע ועל  $l_2$ .

- (ב) יהי  $S$  יחס מעל  $N - \{0\}$  המוגדר באופן  $aSb$  אם  $b|a$ . (מחלק את  $a$ )  
 (I) הוכיחו כי היחס  $S$  הוא סדר מלא מעל  $\{2^k | k \in N\}$ .  
 (II) נגדיר יחס  $T$  ע"י  $aTb$  אם  $aSb$  וגם  $bSa$ .  
 הוכיחו כי  $T$  הוא יחס שקילות על  $N - \{0\}$  ותארו את מחלקות השקילות שלו.

### שאלה 3

תהי  $A$  קבוצה אינסופית. הוכיחו כי קיימת קבוצה  $B \subset A$  (ממש) כך ש-  
 $|B| = |A|$

### שאלה 4

- א. (6%) יהי  $n$  מספר אי-זוגי. תהי,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  תמורה כלשהי של המספרים:  
 $(1, 2, \dots, n)$ . הוכיחו כי המכפלה:  $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \dots (a_n - n)$  היא תמיד זוגית.  
 ב. (2%) תהי  $A$  קבוצת גרביים מצבע כחול,  $|A| = 20$ , תהי  $B$  קבוצת גרביים מצבע אדום,  $|B| = 10$  ותהי  $C$  קבוצת גרביים בצבע צהוב,  $|C| = 25$ .  
 נגדיר:  $D = A \cup B \cup C$ . מהו המספר המינימלי של גרביים שיש להוציא מ- $D$  (מבלי אפשרות לראות הצבע תחילה) על מנת להבטיח שיהיה זוג גרביים חד-צבעי?  
 הסבירו!

ב. נתונה נוסחת הנסיגה:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2^n \\ a_0 = 1, a_1 = -1 \end{cases}$$

רשמו נוסחה מפורשת ל- $a_n$ .

## שאלה 5

א. בכמה תמורות של מספרים הטבעיים  $(1, 2, \dots, n)$  המספר  $i+1$  לא מופיע מיד אחרי  $i$ , עבור  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

ב. רשמו נוסחת נסיגה (עם תנאי התחלה) עבור הבעיה הבאה:

במגרש חניה ישנם  $n$  מקומות חניה בשורה. בכמה אופנים ניתן לסדר בהן מכוניות מהסוגים: קדילק, סוברו וטויוטה אם ידוע שמכוונות הקדילק זקוקה לשני מקומות חניה ואילו הסוברו והטויוטה זקוקות למקום אחד.

(הערה: יש למלא את כל  $n$  מקומות החניה. כמו כן מס' המכוניות מכל סוג אינו מוגבל, וכן אין מבדילים בין מכוניות מאותו סוג)

ג. הוכיחו משיקולים קומבינטוריים: 
$$\binom{n+m}{2} = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + nm$$

ד. מה המקדם של  $x^{26}$  במכפלה:  $(1+x)^{30} (1+x^{10})^{20}$  ?

## שאלה 6

א. מי העץ המותאם למילה:  $(3, 2, 1, 1, 5, 6, 6, 7)$  ?

ב. יהי  $C_n$  ( $n \geq 3$ ) מעגל פשוט. הוכיחו כי:

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{אם } n \\ 3, & \text{אם } n \end{cases}$$

כאשר  $\chi(C_n)$  הוא מס' הצביעה המינימלי של  $C_n$  (צביעת חוקית של צמתים)

ג. יהי  $G$  גרף פשוט חסר מעגלים ולו  $n$  צמתים ו- $k$  רכבי קשירות.

הוכיחו כי:  $|E(G)| = n - k$ .

ד. יהי  $G$  גרף פשוט ו- $\bar{G}$  הגרף המשלים שלו.

הוכיחו כי  $G$  ואו  $\bar{G}$  הוא קשור.