

משך הבחינה שלוש שעות. השמוש בכל חומר עזר, או במחשבון, להוציא דפי נוסחאות המצורפות לשאלון, **אסור**.

לגליון הבחינה מצורפים דפים ריקים לכתובת התשובות. רשום תשובותיך הסופיות **רק** על דפים אלה, לכל שאלה בדף **נפרד** הנושא את מספרה. המחברת מיועדת לטייטא בלבד ותכנה **לא יבדק**. הקפד לציין על גבי **כל דף** את **מספר הסטודנט** שלך ואת **מספרה הסדורי** של המחברת (הדפים **יופרדו** לצורך הבדיקה).

נמק כל פתרון בפרוט ובמדויק.

כמקובל, האותיות R, N, Q מציינות, בהתאמה, את קבוצות המספרים הטבעיים, הממשיים והרציונלים.

חלק ראשון, השב על שלוש מהשאלות 1 עד 4

1. א. בלא שימוש בסימן השלילה " \sim ", הצג נוסח מוצרן חלופי לפסוק הבא:
 $\sim \left(\exists x \in Q \left(\left(\forall y \in Q (y^2 < 2 \Rightarrow x > y) \right) \wedge \left(\forall \varepsilon > 0 \exists z \in Q (z^2 < 2 \wedge z > x - \varepsilon) \right) \right) \right)$

ב. האם הפסוק בסעיף א' הוא אמת?

2. חשב את העצמות הבאות (כאשר תשובתך מבוססת על קיום פונקצית שקילות בין קבוצות, הצג אותה במפורש):

א. $|\{f \in R^R \mid x \notin Q \Rightarrow f(x) = x\}|$

ב. $|(N \rightarrow \{1,2,3\}) - (N \rightarrow \{1,2\})|$

ג. $|P(A) \cap P(P(A))|$ כאשר הקבוצה A מוגדרת על ידי: $A = \{a, \phi, \{a\}\}$

3. נגדיר: $F = \lambda x \in R. \{A \in P(R) \mid x \in A\}$

א. הצג תחום וטווח ל- F

ב. האם $F(1) \cap F(2) = \phi$?

ג. האם קיימת פונקציה G כך שההרכבה $G \cdot F$ היא פונקציה על הטווח שמצאת בסעיף א' ? אם כן, הצג G כזו.

ד. האם קיימת פונקציה G כך שההרכבה $G \cdot F$ היא פונקצית הזהות על התחום שמצאת בסעיף א' ? אם כן, הצג G כזו.

4. תהינה A, B ו- C קבוצות לא ריקות.

א. באילו תנאים קיימת פונקציה חד חד ערכית מ- $A \rightarrow B$ ל- $A \rightarrow C$? $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

ב. בהתקיים התנאים הנדרשים בסעיף א', הצג פונקציה כזו והראה שהיא אכן חד חד ערכית.

חלק שני. השב על שתיים מהשאלות 5,6,7

5. א. בכמה מיילים באורך k , מעל האי"ב $\{1,2,3\}$, אין שתי הופעות רצופות של הספרה 1 ?

ב. בכמה תמורות של המספרים 1,2,3,4,5,6,7,8 אף לא אחד מהמספרים 1,2,3,4 נמצא במקומו הטבעי?

6. נתונים שני עצים, (V, E_1) ו- (V, E_2) , בעלי אותה קבוצת קדקדים V וקבוצות זרות של קשתות E_1 ו- E_2 . נגדיר גרף $G=(V, E)$, שקבוצת הקשתות שלו היא האיחוד $E=E_1 \cup E_2$.

א. הוכח כי יש ב- G קדקד שדרגתו אינה עולה על שלוש.

צצה: חשב תחילה את מספר הקשתות ב- G

ב. האם קדקד שדרגתו אינה עולה על שלוש קיים בהכרח ב- G גם כאשר E_1 ו- E_2 . אינן זרות?

ג. בכמה עצים על קבוצת הקדקדים $\{1,2,\dots,6\}$, אין שום קדקד בדרגה זוגית? השלם את החישוב והצג תוצאה סופית מפורשת (מספר).

7. א. חשב את הפונקציה היוצרת הרגילה של הסדרה $\lambda_{k \in \mathbb{N}} a_k$ כאשר a_k הוא מספר המחרוזות בנות 7 ספרות עשרוניות (0 עד 9) שסכומן k .

צצה: חשב תחילה על "מחרוזת" בת ספרה אחת בלבד.

ב. חשב את הפונקציה היוצרת הרגילה של הסדרה $\lambda_{k \in \mathbb{N}} b_k$ כאשר b_k הוא מספר המחרוזות בנות 7 ספרות עשרוניות שסכומן אינו עולה על k .

ג. חשב את מספר המחרוזות בנות 7 ספרות עשרוניות שסכומן אינו עולה על 10.

בהצלחה!