

משך הבחינה שלוש שעות. השמוש בכל חומר עזר, או במחשבון, להוציא דפי נוסחאות המצורפות לשאלון, **אסור**.

לגיון הבחינה מצורפים דפים ריקים לכתובת התשובות. רשמו את תשובותיכם הסופיות **רק** על פני דפים אילו. לכל שאלה יש דף **נפרד** הנושא את מספרה. המחברת מיועדת לטיוטא בלבד ותכנה **לא יבדק**. הקפידו לציין על כל דף את **מספר הסטודנט** שלכם ואת מספרה הסידורי של המחברת. (הדפים **יופרדו** לצורך הבדיקה).

נמקו כל פתרון בפרוט ובמדויק.

כמקובל, האותיות N, R ו- Q מציינות, בהתאמה, את קבוצות המספרים הטבעיים, הממשיים והרציונלים.

חלק ראשון: ענו על שלוש מהשאלות 1 עד 4.

1. א. בלא שימוש בסימני הקוניונקציה " \wedge " והדיסיונקציה " \vee ", הצג נוסח מוצרן חלופי לפסוק:

$$\exists x \in \mathbb{R} \left((\forall y \in \mathbb{Q} (y^2 < 2 \Rightarrow x > y)) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \exists z \in \mathbb{Q} (z^2 < 2 \wedge z > x - \varepsilon)) \right)$$

ב. האם הפסוק בסעיף א' הוא אמת?

2. חשב את העצמות של הקבוצות הבאות (כאשר תשובתך מבוססת על קיום פונקצית שקילות בין קבוצות, הצג אותה במפורש):

א. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{Q} f(x) \in \{x, x+1\}\}$

ב. $(N \rightarrow \{1, 2, 3\}) - (N \rightarrow \{1, 2\}) \cap P(N \times N)$

ג. קבוצת כל יחסי הסדר המלא ב- R

3. נגדיר: $F = \lambda x \in \mathbb{R}. \{A \in P(\mathbb{R}) \mid x^2 \notin A\}$

א. הצג תחום וטווח ל- F

ג. האם קיימת פונקציה G כך שהרכבה $G \circ F$ היא פונקציה על הטווח שמצאת בסעיף א' ? אם כן, הצג G כזו.

ד. האם קיימת פונקציה G כך שהרכבה $G \circ F$ היא פונקצית הזהות על התחום שמצאת בסעיף א' ? אם כן, הצג G כזו.

4. תהינה A, B ו- C קבוצות לא ריקות.

- א. באילו תנאים קיימת פונקציה מ- $(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)$ על $B \rightarrow C$
- ב. בהתקיים התנאים הנדרשים בסעיף א', הצג פונקציה כזו והראה שהיא אכן על הטווח האמור.

חלק שני: ענו על שתיים מהשאלות 5,6,7.

5. א. בכמה חלוקות של קבוצת המספרים הטבעיים מ-1 עד n לשלוש קבוצות זרות A, B, ו-C אין בקבוצה A שני מספרים עוקבים?
ב. בכמה תמורות f של המספרים 1,2,3,4,5,6,7,8 מתקיים, לכל מספר x בתחום, $|f(x)-x|<2$. הצג תשובה סופית.
6. א. נתונים שני עצים, (V, E_1) ו- (V, E_2) , בעלי אותה קבוצת קדקדים V וקבוצות זרות של קשתות E_1 ו- E_2 . נגדיר גרף $G=(V, E)$, שקבוצת הקשתות שלו היא האיחוד $E=E_1 \cup E_2$. הוכח כי אפשר לחלק את V ל-4 קבוצות זרות כך שבתת הגרף הנפרש ע"י כל אחת מהן לא תהיה שום קשת.
ב. יהיה n מספר טבעי (שונה מ-0) ו- x ספרה עשרונית כלשהי שונה מ-0. הוכח כי קיימת כפולה שלמה של n (שונה מ-0) שההצגה העשרונית שלה מורכבת מהספרות 0 ו- x .

7. השתמשו בעקרונות פולק היננים

7. א. מצאו את הפונקציה היוצרת $F(k)$. כאשר λk . $F(k)$ הינו מספר הפתרונות של המשוואה:
 $a+b+c=k$ כאשר $a, b, c, k \geq 0$ הם מספרים שלמים ובונוסף: $b \neq c$.

ב. מצאו ביטוי סגור ל- $\sum_{k=0}^n (k+1)(k+2)$.

בהצלחה!