מתימטיקה בדידה - תרגיל מס' 2

1. הצרן את הטענות הבאות:

(א) אם יש פילים על הירח אז פילים אילו הם ירוקים.
(ב) הכרחי להיות חזק כדי להיות טייס.
(ג) כל סוס באורווה שזנבו לבן הוא בעל כתם על המצח.
(ד) סוסים עם זנב לבן אינם מחבבים סוסים עם כתם על המצח.
(ה) לאף סוס באורווה אין זנב לבן.
(ו) באורווה יש לכל היותר שני סוסים שחורים.
(ז) דרך נקודה שמחוץ לישר נתון עובר מקביל יחיד לאותו ישר.
(ח) במשולש שווה צלעות, כל הזויות שוות זו לזו.

2. בלא שימוש בסימן השלילה הצג נוסח מוצרן חלופי ל־:

$$\neg[\exists x \in \mathbb{Q}.\forall y \in \mathbb{Q}.((y^2 < 2 \to x > y) \wedge (\forall \epsilon > 0.\exists z \in \mathbb{Q}.(z^2 < 2 \wedge z > x - \epsilon)))]$$

$\mathbb{Q}$ - קבוצת המספרים הרציונליים. האם זהו פסוק אמת?
אם כן - נמק בהרחבה. אם לא -תן דוגמא נגדית.

3. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? נמק.

- $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ ו־$(\forall xP(x)) \wedge (\forall xQ(x))$.
- $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ ו־$(\exists xP(x)) \wedge (\exists xQ(x))$.
- $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ ו־$(\forall xP(x)) \vee (\forall xQ(x))$.
- $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ ו־$(\exists xP(x)) \vee (\exists xQ(x))$.

4. נסח בעברית את הטענות המוצרנות על ידי הפסוקים הבאים. לגבי כל פסוק, קבע אם הוא אמת או שקר על ידי דוגמא נגדית או הסבר מדויק.

(א) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}.[((b \neq 0) \wedge (b^2 - 4ac \geq 0)) \to (\exists x \in \mathbb{R}.ax^2 + bx + c = 0)]$
(ב) $\exists x \in \mathbb{R}.[(x > 1) \to (\forall y \in \mathbb{R}.y > 100)]$
(ג) $(\exists x \in \mathbb{R}.x > 1) \to (\forall y \in \mathbb{R}.y > 100)$
(ד) $(\forall x \in \mathbb{R}.\exists y \in \mathbb{R}.x = y + 1) \wedge (\forall y \in \mathbb{R}.\exists x \in \mathbb{R}.y = x + 1)$
(ה) $\exists x \in \mathbb{R}.[(\exists y \in \mathbb{R}.x = (1 - y)^2) \wedge (\exists y \in \mathbb{R}.x = -y^2)]$
(ו) $\forall \epsilon \in \mathbb{R}.[(\epsilon > 0) \to (\exists n_0 \in \mathbb{N}.(\forall n \in \mathbb{N}.(n > n_0) \to (\frac{1}{n} < \epsilon)))]$
(ז) $\forall \epsilon \in \mathbb{R}.[(\epsilon > 0) \to (\exists n_0 \in \mathbb{N}.[\forall n \in \mathbb{N}.((n > n_0) \to (|\frac{1}{n} - 1| < \epsilon))])]$

5. בדקו האם המסקנה "יוסי יעזור למשה או שדני לא יעזור למשה" נובעת לוגית מההנחות הבאות: "יוסי יעזור למשה אם משה יבקש", "דני יעזור למשה אם משה יתחיל ללמוד", "משה יתחיל ללמוד".