מתימטיקה בדידה - תרגיל מס' 3

1. הוכח כי לכל זוג קבוצות A ו־B מתקיים $A = B$ אם ורק אם $A \triangle B = \emptyset$.
(רמז: הוכחה בדרך השלילה).

2. הוכח או הפרך על ידי דוגמא נגדית:

(א) $\forall A \forall B \forall C.\ (A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

(ב) $\forall A \forall B \forall C.\ A \triangle (B \cup C) = (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$

(ג) $\forall A \forall B \forall C.\ A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

(ד) $\forall A \forall B \forall C.\ A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

(ה) $\forall A \forall B \forall C.\ (A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

3. $A = \{a, \emptyset, \{a\}\}$. רשום את $P(A) \cap P(P(A))$.

4. רשום את $A - B$ ואת $A \triangle B$ עבור:

(א) $A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(ב) $A = \{2k \mid k \in N\}$, $B = \{2k - 1 \mid k \in N\}$

(ג) $A = \{x \in R \mid 1 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x \in R \mid 3 < x < 5\}$

5. הוכח או הפרך על ידי דוגמא נגדית:

(א) $\forall A \forall B.\ P(A \cap B) = P(A) \cup P(B)$

(ב) $\forall A.\ P(A) \subseteq P(P(A))$

(ג) $\forall A.\ P(A) \cap A \neq \emptyset$

(ד) $\forall A.\ P(A) \cap A = \emptyset$

6. הוכח או הפרך על ידי דוגמא נגדית:

(א) $16 \in \{n \mid n \in N \wedge \exists k \in N. k^2 = n\}$

(ב) $0 \in \{x \mid \forall y. y \in \{x \mid \exists z \in N. x^2 = z\} \rightarrow y \geq x\}$

7. הוכח או הפרך על ידי דוגמא נגדית:

(א) $\forall A \forall B. P(A \triangle B) = P(A) \cup P(B)$

(ב) $\forall A \forall B. P(A - B) = P(A) - P(B)$

8. (א) מצא סדרת קבוצות $A_0, A_1, A_2, \ldots$ המקיימת לכל i:

$$(|A_i| = i) \wedge (A_i \subseteq A_{i+1}) \wedge (A_i \in A_{i+1})$$

(ב) מצא דוגמא לקבוצה A כך שבקבוצה $A \cap P(A)$ יש איבר אחד, שני איברים, שלושה איברים.

(ג) מצא דוגמא לקבוצה A כך ש־$|A| = 3 \wedge A \subseteq P(A)$

9. נתונות הקבוצות $A_i = \{-i, -i+1, ..., i-1, i\}$ עבור $i = 1, 2, ..., 100$. מצא את הקבוצות $\bigcup_{i=1}^{100} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{100} A_i$.

10. הוכח או הפרך:

(א) $3 \in \bigcap(\{\{n\} \mid n \in N\})$

(ב) $\frac{1}{2} \in \bigcap(\{\{x \in R \mid \frac{1}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}\} \mid n \in \{k \in N \mid k \geq 2\}\})$