

מתימטיקה בדידה - תרגיל מס' 3

1. הוכח כי לכל זוג קבוצות A ו- B מתקיים $A = B$ אם ורק אם $A \Delta B = \emptyset$.
(רמז: הוכחה בדרך השלילה).

2. הוכח או הפרך על ידי דוגמא נגדית:

$$\forall A \forall B \forall C. (A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C) \quad (\text{א})$$

$$\forall A \forall B \forall C. A \Delta (B \cup C) = (A \Delta B) \cup (A \Delta C) \quad (\text{ב})$$

$$\forall A \forall B \forall C. A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C) \quad (\text{ג})$$

$$\forall A \forall B \forall C. A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C) \quad (\text{ד})$$

$$\forall A \forall B \forall C. (A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D) \quad (\text{ה})$$

3. $A = \{a, \emptyset, \{a\}\}$. רשום את $P(A) \cap P(P(A))$.

4. רשום את $A - B$ ואת $A \Delta B$ עבור:

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}, A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\} \quad (\text{א})$$

$$B = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}, A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \quad (\text{ב})$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}, A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\} \quad (\text{ג})$$

5. הוכח או הפרך על ידי דוגמא נגדית:

$$\forall A \forall B. P(A \cap B) = P(A) \cup P(B) \quad (\text{א})$$

$$\forall A. P(A) \subseteq P(P(A)) \quad (\text{ב})$$

$$\forall A. P(A) \cap A \neq \emptyset \quad (\text{ג})$$

$$\forall A. P(A) \cap A = \emptyset \quad (\text{ד})$$

6. הוכח או הפרך על ידי דוגמא נגדית:

$$16 \in \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N}. k^2 = n\} \quad (\text{א})$$

$$0 \in \{x \mid \forall y. y \in \{x \mid \exists z \in \mathbb{N}. x^2 = z\} \rightarrow y \geq x\} \quad (\text{ב})$$

7. הוכח או הפרך על ידי דוגמא נגדית:

$$\forall A \forall B. P(A \Delta B) = P(A) \cup P(B) \quad (\text{א})$$

$$\forall A \forall B. P(A - B) = P(A) - P(B) \quad (\text{ב})$$

8. (א) מצא סדרת קבוצות $A_0, A_1, \dots, A_i, A_{i+1}, \dots$ המקיימת לכל i :

$$(|A_i| = i) \wedge (A_i \subseteq A_{i+1}) \wedge (A_i \in A_{i+1})$$

(ב) מצא דוגמא לקבוצה A כך שבקבוצה $A \cap P(A)$ יש איבר אחד, שני איברים, שלושה איברים.

(ג) מצא דוגמא לקבוצה A כך ש- $|A| = 3 \wedge A \subseteq P(A)$

9. נתונות הקבוצות $A_i = \{-i, -i+1, \dots, i-1, i\}$ עבור $i = 1, 2, \dots, 100$. מצא את הקבוצות $\bigcap_{i=1}^{100} A_i$, $\bigcup_{i=1}^{100} A_i$.

10. הוכח או הפרד:

(א) $3 \in \bigcap (\{\{n\} \mid n \in N\})$

(ב) $\frac{1}{2} \in \bigcap (\{\{x \in R \mid \frac{1}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}\} \mid n \in \{k \in N \mid k \geq 2\}\})$