מתמטיקה בדידה - תרגיל 8

1. תהא a עוצמה, ותהא B קבוצה בעלת עוצמה $|B| > a$. הוכח שקיימת תת קבוצה של B בעלת עוצמה a.

2.
   א. חשב את עוצמת קבוצת כל הסדרות ההנדסיות האינסופיות של מספרים רציונליים
   ב. חשב את עוצמת קבוצת כל הסדרות ההנדסיות האינסופיות של מספרים ממשיים.
   ג. חשב את עוצמת קבוצת כל הסדרות ההנדסיות האינסופיות של מספרים מרוכבים.

3. מספר ממשי יקרא **מספר אלגברי** אם הוא שורש של פולינום במקדמים שלמים (אם אינך זוכר את ההגדרה של פולינום – חפש ב *wikipedia*). מספר ממשי יקרא **מספר טרנסצנדנטלי** אם הוא לא מספר אלגברי (למשל π ו e הינם מספרים טרנסצנדנטליים).
   א. הוכח כי עוצמת קבוצת המספרים האלגברים היא $\aleph_0$.
   ב. הוכח כי עוצמת קבוצת המספרים הטרנסצנדנטליים היא $\aleph$.

4.
   א. עיגול במישור מוגדר להיות קבוצת נקודות $\{\langle x,y\rangle \in R\times R \mid (x-a)^2+(y-b)^2 < r^2\}$ עבור a, b ממשיים כלשהם ו– $r > 0$. תהי C קבוצה אינסופית של עיגולים זרים במישור. הוכח כי $|C| = \aleph_0$.
   ב. מעגל במישור מוגדר להיות קבוצת נקודות
   $\{\langle x,y\rangle \in R\times R \mid (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2\}$ עבור a, b ממשיים כלשהם ו– $r > 0$.
   תהי C קבוצה אינסופית של מעגלים זרים במישור. האם בהכרח $|C| = \aleph_0$?

5. מה עוצמת קבוצת כל התוכניות בשפת C?

6. נגדיר יחס S על $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ע"י:
$$\forall <x_1,y_1>,<x_2,y_2> \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}.\ <x_1,y_1> S <x_2,y_2> \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2+y_1^2 = x_2^2+y_2^2$$
   א. הוכח כי S הוא יחס שקילות.

ב. מה עוצמת כל מחלקת שקילות של S? הוכח את תשובתך.
ג. מה עוצמת קבוצת המנה? הוכח את תשובתך.

7. הראה שקבוצת כל הסדרות האינסופיות המונוטוניות עולות שאבריהן הם מספרים ראשוניים אינה בת מניה.

8.

א. תהי $F \subseteq P(\mathbb{N})$ קבוצה של קבוצות זרות (כלומר לכל $A, B \in F$ מתקיים $A \cap B = \phi$).
הוכח כי $|F| \leq \aleph_0$.

ב. תהי $F \subseteq P(\mathbb{N})$ קבוצה של קבוצות, המקיימת שבחיתוך של כל שני איברים בה, יש לכל היותר איבר אחד. הוכח כי $|F| \leq \aleph_0$. **<u>רמז</u>**: במקרה בו בכל קבוצה מ- F יש לפחות שני אברים, מצא פונקציה חח"ע המתאימה לכל קבוצה זוג טבעיים.

ג. תהי $F \subseteq P(\mathbb{N})$ קבוצה של קבוצות, המקיימת שבחיתוך של כל שני איברים בה, יש לכל היותר 2005 אברים. הוכח כי $|F| \leq \aleph_0$.

<u>רמז</u>: במקרה בו בכל קבוצה מ- F יש לפחות 2005 אברים, מצא פונקציה חח"ע המתאימה לכל קבוצה 2006-יה.

בהצלחה ☺