ה. יסודות תורת הגרפים

ה.1 מושגי יסוד

תורת הגרפים היא מכשיר מתמטי רב-עוצמה, המשמש לפתרון סוגים רבים של בעיות. הסיבה לכך הינה, שמצבים ובעיות רבים ניתן לייצג בעזרת גרפים סופיים.

פירוש מושג ה"גרף" בתורת הגרפים שונה מאוד מהמושג של "גרף של פונקציה", המוכר לקוראים. בתורת הגרפים גרף הינו קבוצה של נקודות (הנקראות "קדקודי הגרף") יחד עם קבוצה של קווים המחברים ביניהן (ונקראים "קשתות הגרף"). מפות עירוניות מספקות דוגמה טובה לגרפים במובן זה. במפה כזו הרחובות (ליתר דיוק: קטעים של רחובות) משמשים כקשתות, והצמתים מתפקדים כקדקודים. כל קטע של רחוב *מחבר* שני צמתים. שני צמתים אלו הינם קדקודי הקצה (או פשוט: הקצוות) של אותו קטע, והם נחשבים *סמוכים* זה לזה. כל אלה הינן דוגמאות של מושגים יסודיים של תורת הגרפים. בדומה, בעיות כגון "האם אפשר לצעוד דרך כל הרחובות של רמת אביב ג' בלי לחזור על אף קטע-רחוב פעמיים?", או "מה המסלול הקצר ביותר מהאוניברסיטה לתחנת הרכבת?" הן בעיות אופייניות של תורת הגרפים.

נשים לב שמפות עירוניות נחלקות לשני סוגים עיקריים: אלו שנועדו לשימושם של הולכי רגל, ואלו שנועדו לשימושם של נהגי מכוניות. במפות, שנועדו לנהגים, מצוין ביחס לכל קטע-רחוב, באיזה כיוון מותר לנסוע בו. הקשתות במפות אלו הינן אפוא *מכוונות*. בקשתות כאלה אנו מבחינים בין קדקוד היציאה של הקשת (הקדקוד בו היא מתחילה) וקדקוד הכניסה שלה. מפות להולכי רגל, לעומת זאת, הן דוגמה *לגרפים לא מכוונים*. בגרפים כאלה לכל קשת יש עדיין שני קצוות, אך לשניהם יש מעמד זהה.

מספר הערות

(1) כיוון שבגרף מכוון לכל קשת יש כיוון מוגדר, הרי לרחובות דו-סטריים (במפות עירוניות לנהגים) מתייחסים בתורת הגרפים כמייצגים שתי קשתות שונות, עם כיוונים הפוכים. כל צד של רחוב כזה הוא בעצם קשת נפרדת (לזוג קשתות כאלה קוראים קשתות *אנטי-מקבילות*).

(2) קורה לעתים, ששני צמתים מחוברים על-ידי שתי קשתות שונות (או יותר). קשתות כאלה, שיש להן אותן קצוות, נקראות *מקבילות* (כשמדובר בגרף מכוון, הרי ב"אותן קצוות" הכוונה, שלשתי הקשתות יש אותו קדקוד יציאה ואותו קדקוד כניסה).[1]

(3) ייתכן גם מצב, שבו קשת מחברת קדקוד מסוים עם עצמו (כיכרות עם מוצא יחיד, למשל). קשתות כאלה נקראות *לולאות*. גרפים, שאין בהם לולאות או קשתות מקבילות, נקראים גרפים *פשוטים*.

(4) במפות עירוניות ייתכנו גם מדרחובים. נשים לב, שמבחינת הנהגים מדרחובים אינם מייצגים קשתות, בעוד שמבחינת הולכי הרגל – כן. מפות, שנועדו הן לשימושם של הולכי רגל והן לשימוש של נהגים, מהוות לכן דוגמה למבנים מתמטיים, שהם מסובכים יותר מאשר גרפים.

הן בהערה האחרונה והן בהקדמה התייחסנו לגרפים כאל "מבנים מתמטיים". עד כה דנו אבל בגרפים מנקודת מבט אינטואיטיבית בלבד. כדי שנוכל אכן לראותם כמבנים מתמטיים ולטפל בהם באופן מתמטי, עלינו לספק למושגים השונים הגדרות מתמטיות מדויקות. כרגיל במתמטיקה המודרנית, הגדרות אלו ניתנות במסגרת (השפה של) תורת הקבוצות. עתה, בחינה מדוקדקת של ההסברים, שהבאנו למעלה, תראה, שאנו מכירים גרף לחלוטין, אם אנו יודעים (א) מי הם הקדקודים; (ב) מי הן הקשתות; (ג) אילו קדקודים מקשרת כל קשת. בהתאם נגדיר:

גרף מכוון הוא שלשה $G = <V, E, F>$, שבה V ו- E הן קבוצות זרות, $V \neq \varnothing$, ו- $F : E \to V^2$.

V נקראת קבוצת הקדקודים של הגרף G.

E נקראת קבוצת הקשתות של הגרף G.

אם $e \in E$ ו- $F(e) = <v_1, v_2>$, אז אומרים ש-e מחברת את v_1 ל-v_2, ש-v_1 היא קדקוד היציאה (או ההתחלה) של e, ש-v_2 הוא קדקוד הכניסה (או הסוף) שלה, ש-v_1 ו-v_2 נמצאים (או חלים) על e, וש-v_1 ו-v_2 הם *סמוכים*.

אם $e_1 \in E$, $e_2 \in E$, ו- $F(e_1) = F(e_2)$, אז e_1 ו-e_2 נקראות קשתות מקבילות.

אם $e \in E$ ו- $\pi_1(F(e)) = \pi_2(F(e))$, אז e נקראת לולאה.

גרף מכוון $<V, E, F>$ נקרא *פשוט* אם F חח"ע ו- $\pi_1(F(e)) \neq \pi_2(F(e))$ לכל $e \in E$ (דהיינו: $F(E) \cap i_V = \varnothing$).

[1] בטקסטים מסוימים, גרפים עם קשתות מקבילות נקראים "מולטיגרפים", בעוד מושג ה"גרף" נשמר לגרפים, שאין בהם קשתות מקבילות. גם אנו ננהג כך לפעמים.

גרף לא מכוון הוא שלשה $G = <V, E, F>$, שבה V ו- E הן קבוצות זרות, $V \neq \emptyset$, ו- $F : E \to P_1(V) \cup P_2(V)$ (ראו פרק ג.6).
V נקראת קבוצת הקדקודים של הגרף G.
E נקראת קבוצת הקשתות של הגרף G.

אם $e \in E$ ו- $F(e) = \{v_1, v_2\}$ (כולל המקרה, שבו $v_1 = v_2$), אז v_1 ו-v_2 נקראים הקצוות של e, ואומרים ש-e מחברת את v_1 ל-v_2, ש-v_1 ו-v_2 *נמצאים* (או חלים) על e, וש-v_1 ו-v_2 הם *סמוכים*.
אם $e_1 \in E$, $e_2 \in E$ ו- $F(e_1) = F(e_2)$, אז e_1 ו-e_2 נקראות קשתות מקבילות.
אם $e \in E$ ו- $F(e) \in P_1(V)$, אז e נקראת לולאה.
גרף לא מכוון $<V, E, F>$ נקרא *פשוט*, אם F חח"ע, ו- $F : V \to P_2(E)$.

הגדרה, שבה גרף הוא שלשה, היא מעט מסורבלת. הגדרה כזאת היא הכרחית למעשה, רק אם מרשים קשתות מקבילות (מה שקוראים לפעמים מולטיגרף). כאשר עוסקים בגרף ללא קשתות מקבילות, אפשר לזהות קשת עם זוג הקצוות שלה (זוג סדור, במקרה שהגרף מכוון, זוג לא סדור, שעשוי להיות בעצם סינגלטון, אם הגרף אינו מכוון). זיהוי זה מאפשר את ההגדרות החילופיות הבאות:

גרף מכוון ללא קשתות מקבילות הוא זוג $G = <V, E>$, כך ש- $V \neq \emptyset$, ו- $E \subseteq V^2$ (כלומר: E הוא יחס על V). גרף כזה נקרא *פשוט* אם E יחס אי-רפלקסיבי.

גרף לא מכוון ללא קשתות מקבילות הוא זוג $G = <V, E>$, כך ש- $V \neq \emptyset$, ו- $E \subseteq P_1(V) \cup P_2(V)$. גרף כזה נקרא פשוט אם $E \subseteq P_2(V)$.

כמו בהגדרות הקודמות, איברי V נקראים קדקודי הגרף, ואיברי E – הקשתות שלו. במקרה הלא מכוון, אם $\{v_1, v_2\}$ היא קשת של G (כלומר $\{v_1, v_2\} \in E$), אז v_1 ו- v_2 הם קדקודים סמוכים, המהווים את *קצות* הקשת הזו. קשת מהצורה $\{v\}$ (דהיינו: סינגלטון) נקראת *לולאה*. כרגיל, הגרף הינו פשוט אם ורק אם אין בו לולאות.

במקרה המכוון, אם $<v_1, v_2>$ הוא קשת של G (כלומר: $<v_1, v_2> \in E$), אז v_1 הוא קדקוד היציאה, ו- v_2 הוא קדקוד הכניסה של קשת זו. קשת מהצורה $<v, v>$ נקראת *לולאה*. שוב, גרף כזה הינו פשוט אם ורק אם אין בו לולאות.

הבאנו למעלה שתי הגדרות שונות למושג הגרף. מה הקשר ביניהן? התשובה פשוטה: אם $<V, E>$ הינו גרף לפי ההגדרה השנייה, הרי $<V, E, i_E>$ הינו גרף (ללא קשתות מקבילות) לפי ההגדרה הראשונה. לפי הגדרותינו, אין כל הבדל ממשי בין "שני" הגרפים האלה, כיוון שלא רק שיש להם אותן קשתות ואותם קדקודים, אלא גם ההגדרות ה"שונות" נותנות תשובות זהות לשאלות הבסיסיות, כגון: מי הם קדקודי הקצה של קשת נתונה? אילו קשתות הן לולאות? האם הגרף הוא פשוט? וכו'. כל עוד אין קשתות מקבילות, הבחירה עם איזו הגדרה לעבוד היא שאלה של נוחות וטעם. בספר זה נשתמש בהגדרה הראשונה (גרף כשלשה), כאשר המשפטים בהם נעסוק יהיו תקפים ובעלי עניין גם למולטיגרפים. לעומת זאת, נעדיף לעתים את ההגדרה השנייה (גרף כזוג), כאשר התיאוריה תתרכז בגרפים ללא קשתות מקבילות (ובפרט אם היא תעסוק בגרפים פשוטים). מושגים וטענות, שינוסחו על-פי ההגדרה הראשונה, אפשר תמיד לתרגם לגרפים המאופיינים כזוג $<V, E>$ על-ידי כך שמסתכלים על "$<V, E>$" כקיצור של "$<V, E, i_E>$".

תיארנו למעלה גם שני סוגים שונים של גרפים: גרף מכוון וגרף לא מכוון. גם כאן יש קשרים ברורים: בהינתן גרף מכוון, אפשר לקבל ממנו באופן טבעי גרף לא מכוון על-ידי "מחיקת" הכיוונים של הקשתות. ולהפך, מכל גרף לא מכוון ניתן לקבל באופן טבעי הרבה גרפים מכוונים על-ידי בחירת כיוון לכל קשת, שאינה לולאה.[2] ניסוח מתמטי מדויק של רעיונות אלה מוביל להגדרה הבאה:

הגדרה:

יהיו $G = <V, E, F>$ גרף מכוון ו- $G' = <V', E', F'>$ גרף לא מכוון. נאמר ש-G' *מבוסס* על G, וש- G *מושרה* על-ידי G', אם:

(א) $V = V'$

(ב) $E = E'$

(ג) $F = \lambda e \in E.\ \{\pi_1(F'(e))\ ,\ \pi_2(F'(e))\}$

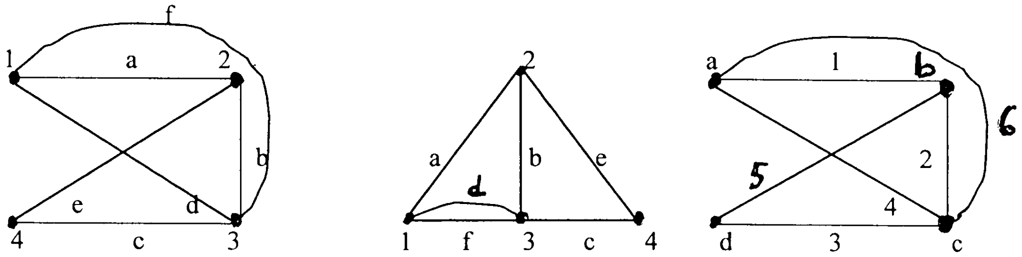
גרף מכוון מבוסס אפוא על גרף לא מכוון, אם לשני הגרפים אותם קדקודים, אותן קשתות, ולכל קשת יש בשניהם אותם קדקודי קצה.

מעתה נשתמש במונח "גרף" לציין גרפים *לא* מכוונים (אלא אם כן נאמר בפירוש אחרת). בדרך-כלל נטפל רק בגרפים עם מספר סופי של קדקודים וקשתות (גרפים כאלה נקראים *סופיים*).

---

[2] מבחינת תורת הגרפים אין הבדל בין "עם כיוון השעון" ו"נגד כיוון השעון". ללולאה $\{x\}$ של גרף לא סדור G אפשר להתאים בגרף המבוסס על G רק את הקשת $<x, x>$.

המחשות חזותיות ("גרפיות") הן בדרך-כלל אמצעי מועיל מאוד לצורך רכישת הבנה ואינטואיציה בתחום מסוים. הדבר נכון במיוחד בתורת הגרפים. כאן מקובל מאוד להמחיש גרף סופי בעזרת דיאגרמה. בדיאגרמה כזו מייצגים קדקוד על-ידי נקודה במישור (עם תווית), וקשת – על-ידי קו רציף (עם תווית), המחבר את הנקודות המייצגות את הקצוות של אותה קשת (בגרף מכוון מוסיפים לקשת ראש חץ מכיוון קדקוד היציאה אל קדקוד הכניסה). הנה שלוש דוגמאות:



(א) (ב) (ג)

נתבונן תחילה בדיאגרמה (א). היא מייצגת את הגרף $G_1 = <V_1, E_1, F_1>$ הבא:

$$V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$F_1(a) = \{1, 2\},\ F_1(b) = \{2, 3\},\ F_1(c) = \{3, 4\},\ F_1(d) = \{1, 3\},$$
$$F_1(e) = \{2, 4\},\ F_1(f) = \{1, 3\}$$

(כלומר:

$$(F_1 = \{<a, \{1, 2\}>, <b, \{2, 3\}>, <c, \{3, 4\}>, <d, \{1, 3\}>, <e, \{2, 4\}>, <f, \{1, 3\}>\}$$

ואיזה גרף מייצגת דיאגרמה (ב)? ובכן, בדיקה תגלה ללא קושי, שלמרות הצורה השונה, דיאגרמה (ב) אף היא מייצגת את G_1 (כלומר: דיאגרמות (א) ו-(ב) מייצגות אותו גרף בדיוק). אנו רואים אפוא, שאותו גרף ניתן לייצג על-ידי דיאגרמות רבות, שיכולות להיות שונות מאוד זו מזו. כך, למשל, בין דיאגרמה (א) לבין דיאגרמה (ב) קיים השוני המהותי הבא: בעוד בדיאגרמה (ב) אין שתי קשתות הנחתכות זו עם זו (בנקודה פנימית שלהן), בדיאגרמה (א) המצב שונה: הקווים המייצגים את הקשתות d ו-e נחתכים. נציין שגרף, שניתן לתת לו ייצוג כמו בדיאגרמה (ב) (כלומר ייצוג, שבו שום שתי קשתות אינן נחתכות), נקרא גרף *מישורי*. הגרף G_1, לדוגמה, הוא מישורי, כיוון שדיאגרמה (ב) היא ייצוג שלו מהסוג הנדרש. דבר זה אינו עומד בסתירה לכך, שדיאגרמה (א), שגם

היא מייצגת את G_1, אינה עומדת בדרישת המישוריות. גרף הינו מישורי, אם יש לו *איזשהו* ייצוג,המקיים את תנאי המישוריות. התשובה לשאלה,אם גרף נתון הוא מישורי או לא,עלולה לכן להיות קשה.[3]

נעבור עתה לדיאגרמה (ג). היא מייצגת את הגרף $G_2 = <V_2, E_2, F_2>$ הבא:

$$V_2 = \{a, b, c, d\}$$

$$E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$F_2(1) = \{a, b\},\ F_2(2) = \{b, c\}, F_2(3) = \{c, d\},\ F_2(4) = \{a, c\},\ F_2(5) = \{b, d\},$$
$$F_2(6) = \{a, c\}$$

ברור שהגרפים G_1 ו-G_2 הינם שונים (די לציין, למשל, שקבוצות הקדקודים שלהם הינן שונות). עם זאת, הדמיון בצורתן של הדיאגרמות (א) ו-(ג) מרמז על קשר הדוק בין שני הגרפים. קשר זה מבוטא בעזרת מושג ה*איזומורפיזם*. בקצרה, איזומורפיזם של שני גרפים (מכוונים שניהם או לא מכוונים) הוא פונקציית שקילות המתאימה לכל קדקוד של האחד קדקוד של השני ולכל קשת של האחד קשת של השני, כך שקדקודי הקצה של כל קשת מותאמים לקדקודי הקצה של תמונתה. ההגדרה הרשמית הבאה מנסחת זאת באופן מדויק יותר:

הגדרה:

(א) יהיו $G_1 = <V_1, E_1>$ גרפים (שניהם מכוונים או שניהם לא מכוונים).
איזומורפיזם בין G_1 ל- G_2 הוא פונקציית שקילות g מ- V_1 ל- V_2, עבורה מתקיים:

(1) במקרה הלא מכוון:

$$\forall a, b \in V_1.\ \{g(a), g(b)\} \in E_2 \Leftrightarrow \{a, b\} \in E_1$$

(2) במקרה המכוון:

$$\forall a, b \in V_1.\ <g(a), g(b)> \in E_2 \Leftrightarrow <a, b> \in E_1$$

(ב) יהיו $G_1 = <V_1, E_1, F_1>$, $G_2 = <V_2, E_2, F_2>$.

איזומורפיזם בין G_1 ו- G_2 הוא פונקציית שקילות g בין $V_1 \cup E_1$ ובין $V_2 \cup E_2$ כך שמתקיים:[4]

---

[3] הנושא של גרפים מישוריים הוא נושא חשוב, עם תוצאות מעניינות רבות, אך בקורס זה לא ניכנס אליו (מעבר להזכרת עצם המושג).

(i) $g(V_1) = V_2$

(ii) $g(E_1) = E_2$

(iii) $\forall e \in E_1.\ F_2(g(e)) = g(F_1(e))$

תרגיל:

בדקו, שההגדרות ב-(א) וב-(ב) תואמות זו את זו, כאשר מסתכלים על "$G = <V, E>$" כעל קיצור של "$G = <V, E, i_E>$".

שני גרפים נקראים *איזומורפיים*, אם קיים איזומורפיזם ביניהם. כך למשל G_1 ו- G_2, המיוצגים בדיאגרמות למעלה, הם איזומורפיים, כיוון שהפונקציה g הבאה מהווה איזומורפיזם ביניהם:

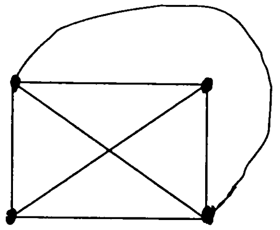
$g(a) = 1$	$g(b) = 2$	$g(c) = 3$	$g(d) = 4$	$g(e) = 5$	$g(f) = 6$
$g(1) = a$	$g(2) = b$	$g(3) = c$	$g(4) = d$		

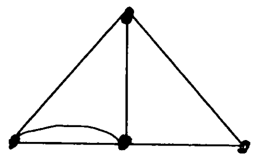
שני גרפים איזומורפיים יכולים להיות שונים זה מזה מאוד בזהותם של הקדקודים והקשתות שלהם (ב- G_1 הקדקודים הם אותיות, והקשתות הם מספרים, בעוד שב- G_2 המצב הפוך), אך מבחינת תורת הגרפים אין לזה שום חשיבות. כל מה שיש לתורת הגרפים לומר באשר לגרף מסוים G, תקף באותה מידה לגבי כל גרף שהוא איזומורפי ל- G. לפעמים אומרים אפילו, שמדובר ב"אותו הגרף". זה אינו מדויק, כמובן. מה שנכון לומר הוא, *שטיפוס הגרף* שלהם זהה. "טיפוס הגרף" הוא כאן מושג, המתקבל ממושג הגרף ומיחס האיזומורפיות בין גרפים בעזרת אותו תהליך הפשטה, שתואר בפרק ג.1, והוביל שם למושג ה"עוצמה" (קל לברר, שיחס האיזומורפיות הוא אכן יחס שקילות במובן הרחב – ראו דיון בפרק ג.1).[5] גם את מושג "טיפוס הגרף" קל להמחיש על-ידי דיאגרמות: פשוט מוחקים את התוויות מהקדקודים והקשתות של הדיאגרמות המייצגות גרפים מטיפוס זה. כך למשל, את טיפוס הגרף של הגרפים G_1 ו- G_2 מהדיאגרמות למעלה ניתן לייצג בשתי הצורות הבאות (כמו גם בצורות רבות אחרות, כמובן):

---

[4] נזכיר שאם $f: A \to B$ ו- $X \subseteq A$, אז $f(X)$ מסמן את התמונה של X לפי f (ולכן $f(X) \subseteq B$). בפרט: אם $a_1, a_2 \in A$, אז $f(\{a_1, a_2\}) = \{f(a_1), f(a_2)\}$. בדומה, מגדירים $f(<a_1, a_2>) = <f(a_1), f(a_2)>$. עובדות אלו חשובות לצורך הבנת התנאים (i)-(iii) (במיוחד (iii)).

[5] גם כאן מקובל בחלק מהטקסטים להגדיר את "טיפוס הגרף" של גרף G כאוסף כל הגרפים שאיזומורפיים ל- G, וגם כאן הגדרה זו הינה בעייתית, כי אוסף זה אינו מהווה קבוצה. כמו במקרה של עוצמות, הגדרה מדויקת, אך מסובכת יותר, ניתנת במסגרת תורת הקבוצות האקסיומטית.





להלן שתי דוגמאות של טיפוסי גרפים חשובים:

הגדרה:

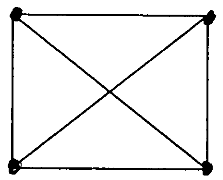
(א) טיפוס הגרף השלם K_n הוא הטיפוס של כל הגרפים הפשוטים, שיש להם n קדקודים, וכל שני קדקודים (שונים) שלהם הם סמוכים.

(ב) טיפוס הגרף הדו-צדדי השלם $K_{m,n}$ הוא הטיפוס של כל הגרפים הפשוטים, שניתן לפרק את קבוצת הקדקודים שלהם לאיחוד זר של שתי קבוצות V_1 ו-V_2, כך ש- $m = |V_1|$, $n = |V_2|$ ושני קדקודים הם סמוכים, אם"ם אחד מהם שייך ל-V_1, והשני ל-V_2.

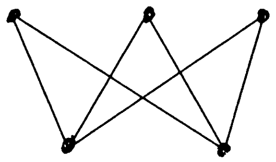
תרגיל

הוכיחו, שכל שני גרפים ב- K_n הם אכן איזומורפיים, וכן שכל שני גרפים ב- $K_{n,m}$ הם איזומורפיים (לכל n ו- m).

להלן ייצוגים גרפיים של K_4 *ושל* $K_{3,2}$:



K_4



$K_{3,2}$

כדי לפשט ניסוח טענות, נהוג לעתים קרובות שלא להקפיד על ההבחנה בין גרף ובין הטיפוס שלו, ולדבר למשל על *הגרף* K_5 (במקום על טיפוס הגרף K_5). מעתה גם אנו ננהג כך לפעמים (אך לא במקומות, בהם עלול להיווצר בלבול!).

כאמור, הבעיות, שתורת הגרפים עוסקת בהן, הן כאלה, שכדי לפתור אותן לגבי גרף מסוים G, כל מה שנחוץ לדעת על G הוא טיפוס-הגרף שלו. דוגמה פשוטה (מאוד)

לבעיה כזו היא הבעיה הבאה: "כמה קשתות יש בגרפים מטיפוס K_n?". התשובה היא כמובן $\binom{n}{2}$, כיוון שכל זוג קדקודים (מתוך ה- n שיש לגרף) מגדיר קשת (יחידה). לזהותם של הקדקודים אין כמובן שום רלוונטיות עבור בעיה זו. כדאי אגב לשים לב, שעצם *ניסוח* הבעיה מניח למעשה מראש, שהתשובה זהה לכל הגרפים ב- K_n! מעתה ננסח לכן בעיות כאלה פשוט כך: "מה מספר הקשתות ב- K_n?".

נעבור עתה למושג בסיסי נוסף של תורת הגרפים.

הגדרה:

גרף $<V', E'>$ הוא תת-גרף של הגרף $<V, E>$ אם $V' \subseteq V$ ו- $E' \subseteq E$.

הערות:

(1) ההגדרה תופסת במידה שווה הן לגרפים מכוונים והן לגרפים לא מכוונים.

(2) בהגדרה מניחים במפורש, ש- $<V', E'>$ *גרף* (דהיינו ש- $E' \subseteq (V')^2$, אם הגרף מכוון, ו- $E' \subseteq P_1(V') \cup P_2(V')$, אם הוא גרף לא מכוון). בלי קיום תנאי זה אין הזוג $<V', E'>$ מהווה תת-גרף של $<V, E>$, אפילו אם $V' \subseteq V$ ו- $E' \subseteq E$.

תרגיל

הגדירו מתי הגרף $<V', E', F'>$ מהווה תת-גרף של הגרף $<V, E, F>$.

הגדרה:

(1) אם $<V, E>$ גרף מכוון ו- $V' \subseteq V$, אז $<V', E \cap V'^2>$ הוא תת-הגרף של $<V, E>$ *המושרה* על-ידי V'.

(2) אם $<V, E>$ גרף לא מכוון ו- $V' \subseteq V$, אז $<V', E \cap (P_1(V') \cup P_2(V'))>$ הוא תת-הגרף של $<V, E>$ *המושרה* על-ידי V'.

תת-הגרף המושרה על-ידי V' הוא תת-הגרף המקסימלי של $<V, E>$, שקבוצת הקדקודים שלו היא V' (על הקורא לוודא לעצמו עובדה זו, ובפרט שתת-הגרף המושרה על-ידי V' הוא אכן תת-גרף של $<V, E>$!).

באופן אנלוגי נגדיר:

הגדרה:

יהי $<V, E>$ גרף, ותהי $E' \subseteq E$. תת-הגרף של $<V, E>$ *המושרה* על-ידי E' הוא:

$$<\{x \in V \mid \exists y \in V.\ \{x, y\} \in E'\},\ E'>$$

שוב, תת-הגרף של $<V, E>$ המוגדר על-ידי E' הוא תת-הגרף המקסימלי של $<V, E>$, ש- E' הינה קבוצת הקשתות שלו.

תרגיל

(1) הגדירו את מושג תת-הגרף המוגדר על-ידי קבוצה של קשתות במקרה של גרפים מכוונים.

(2) הגדירו את המושגים השונים הקשורים במושג תת-הגרף במקרה של מולטיגרפים (מהצורה $<V, E, F>$).

לסיום הפרק נביא דוגמה פשוטה של תרגום בעיה מ"החיים" לבעיה של תורת הגרפים.

בעיה

הראו, שמבין כל שישה בני-אדם יש שלושה, שכל שניים מהם מכירים זה את זה, או שיש ביניהם שלושה, שאף אחד מהם אינו מכיר איש מהשניים האחרים.

פתרון:

יהי a אחד מהשישה. את האחרים נחלק לשתי קבוצות: אלו שמכירים את a ואלו שלא. כיוון שיש חמישה "אחרים", באחת משתי קבוצות אלו יש שלושה איברים או יותר (ובשנייה – שני איברים או פחות). נניח למשל, שיש לפחות שלושה אנשים מהחמישה, שמכירים את a (במקרה, שיש שלושה שלא מכירים אותו, מטפלים באופן זהה לחלוטין). יהיו לכן b_1, b_2 ו- b_3 שלושה אנשים מהחמישה, המכירים את a. אם אף אחד משלושה אנשים אלו אינו מכיר את האחר, הרי מצאנו שלושה אנשים בקבוצה, שאף אחד מהם אינו מכיר איש מהשניים האחרים. אחרת שניים לפחות מבין b_1, b_2 ו- b_3 מכירים זה את זה. נניח למשל שאלו b_1 ו- b_2. אז b_1, b_2 ו- a הם שלושה אנשים מהקבוצה, שכל שניים מהם מכירים זה את זה.

הבה נציג עתה את הבעיה במונחים של תורת הגרפים. ובכן, "היכרות", כפי השימוש שנעשה במושג זה בטענה ובהוכחתה, הינה יחס סימטרי בין חברי השישייה. נוח לכן להציג אותה באמצעות גרף לא מכוון $<V, E_1>$, בו קבוצת הקדקודים V היא שישיית האנשים, ויש קשת ב- E_1 בין שני אנשים בקבוצה, אם"ם הם מכירים זה את זה. מצד שני, ליחס האי-היכרות יש בטענה מקום לא פחות חשוב מיחס ההיכרות. גם יחס האי-היכרות הוא סימטרי (בטיעון למעלה) וגם אותו נוכל לייצג על-ידי גרף לא מכוון $<V, E_2>$. קבוצת הקדקודים של גרף זה, V, היא אותה קבוצת הקדקודים של הגרף הראשון, אבל הפעם יש קשת בין שני אנשים אם"ם הם אינם מכירים זה את זה.

מה הקשר בין $<V, E_1>$ ו- $<V, E_2>$? התשובה היא, שקבוצת כל הקשתות, המחברות שני איברים שונים של V $(P_2(V))$, היא האיחוד הזר של E_1 ו- E_2. במלים אחרות, $<V, E_1 \uplus E_2>$ הוא גרף שלם בן 6 איברים. את הטענה, שהוכחנו למעלה, נוכל לכן לנסח במונחי תורת הגרפים באופן הבא:

טענה:
נניח ש-$<V, E> \in K_6$ וש- $E = E_1 \uplus E_2$. אז לפחות לאחד מהגרפים $<V, E_1>$ ו- $<V, E_2>$ יש תת-גרף הנמצא ב- K_3 (ובניסוח פחות פדנטי: אם $<V, E>$ הוא הגרף השלם K_6, ו- $E = E_1 \uplus E_2$, אז K_3 הוא תת-גרף של $<V, E_1>$, או של $<V, E_2>$).

הוכחה:
יהי $a \in V$, ותהי E_a קבוצת הקשתות, ש- a נמצא עליהן. אז $|E_a| = 5$. יתר על כן, כיוון ש- $E_a \subseteq E$, ו- $E = E_1 \uplus E_2$, אז

$$E_a = E_a \cap (E_1 \uplus E_2) = (E_a \cap E_1) \uplus (E_a \cap E_2)$$

ולכן

$$5 = |E_a \cap E_1| + |E_a \cap E_2|$$

מכאן, שאו ש- $|E_a \cap E_1| \geq 3$, או ש- $|E_a \cap E_2| \geq 3$. נניח למשל, ש- $|E_a \cap E_1| \geq 3$. יהיו אפוא b_1, b_2, b_3 שלושה איברים שונים של V, כך ש- $\{\{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{a, b_3\}\} \subseteq E_1$.
אם גם $\{b_1, b_2\} \notin E_1$, גם $\{b_1, b_3\} \notin E_1$ וגם $\{b_2, b_3\} \notin E_1$, אז כל שלוש הקשתות הללו נמצאות ב- E_2, ולכן $<\{b_1, b_2, b_3\}, \{\{b_1, b_2\}, \{b_1, b_3\}, \{b_2, b_3\}\}>$ הוא תת-גרף של $<V, E_2>$, השייך ל- K_3. אחרת, אחת משלוש הקשתות הללו נמצאות ב- E_1. נניח למשל, שזו $\{b_1, b_2\}$. במקרה זה נקבל ש- $<\{a, b_1, b_2\}, \{\{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{b_1, b_2\}\}>$ הוא תת-גרף של $<V, E_1>$, השייך ל- K_3.

ההוכחה, שהבאנו זה עתה, היא למעשה תרגום מדויק ללשון תורת הגרפים של ההוכחה, שהבאנו תחילה (במונחי "היכרות" ו"אי-היכרות"). אין להכחיש, עם זאת, שהיא הרבה יוותר קשה לקריאה ולהבנה מאשר ההוכחה המקורית (שהיא בעצם זהה!). עלול אפוא להיווצר הרושם, שתרגום כזה לא יוסיף דבר, ולהיפך: רק מסבך ללא צורך דברים פשוטים. הבה נסביר אפוא, למה תרגום כזה אינו רק מועיל, אלא שברוב המקרים הוא כמעט הכרחי.

ראשית, אותה בעיה עצמה יכולה לצוץ בצורות שונות ומשונות, לאו דווקא במונחים של "היכרות" ו"אי-היכרות" (דוגמה לכך, במונחים של "צביעה", נראה עוד מעט). ללא ניסוח אחיד, אבסטרקטי, במונחים מתמטיים, נהיה נידונים לפתור אותה כל פעם מחדש. הניסוח המתמטי האבסטרקטי מאפשר גם להבדיל בצורה ברורה, מה רלוונטי ומה לא, ולכן הוא מאפשר את יישום הטענה בקשת רחבה של מקרים (כך למשל, העובדה, שבבעיה המקורית דובר בבני-אדם דווקא, היא לא רלוונטית לחלוטין כאן, בעוד שכל מה שרלוונטי לגבי יחס ההיכרות הינו רק הסימטריות שלו).

שנית, את הבעיה הזו ניתן היה לפתור ישירות בקלות כזו, רק בגלל שהיא *פשוטה* מאוד, ואף עוסקת במספרים קטנים מאוד. גם "בעיות מילוליות" פשוטות באלגברה תיכונית ניתן לפעמים לפתור ביתר קלות ישירות (במקום לתרגמן ללשון המשוואות) – אך זה הופך בלתי אפשרי, כשהבעיות מסתבכות קצת יותר! בדומה, גם כאן, בעיות קצת יותר מסובכות מאותו סוג דורשות כבר טיפול מתמטי של ממש, וטיפול כזה ניתן להיעשות רק במסגרת תורה מתמטית, המנוסחת במונחים מתמטיים מדויקים (כבר בפרק הבא נראה דוגמה לכך!). בניגוד לרושם, שעוררה אולי הדוגמה האחרונה, במציאות, הצעד המכריע בפתרון בעיות רבות מ"החיים" הוא ייצוגן בעזרת גרפים והמונחים של תורת הגרפים. ייצוג כזה מאפשר ליישם את התיאוריה העשירה, הטכניקות והאלגוריתמים, שפותחו במסגרת תורת הגרפים (ורק קצת מהם נראה בקורס זה).

עם זאת, כיוון ששימוש עקבי במונחים הטכניים של תורת הקבוצות עלול להיות מכביד, מקובל לעתים בתורת הגרפים להשתמש עבור אותם מושגים עצמם בשמות, שנראים פחות טכניים ויותר אינטואיטיביים. דוגמה טובה לכך היא מושג ה*צביעה*. כשמדובר בתורת הגרפים על "צביעה" של איברי קבוצה מסוימת (בדרך-כלל קבוצת הקדקודים או קבוצת הקשתות של איזה גרף) ב- k צבעים, הכוונה היא בעצם לפרוק אותה קבוצה ל- k תת-קבוצות או פחות.[6] הרעיון האינטואיטיבי הוא, שההבדלה בין תת-הקבוצות בפירוק יכולה להיעשות על-ידי ש"צובעים" את איברי כל אחת מהן בצבע משלה, המייחד אותה. כך למשל, מקובל לתאר את הבעיה האחרונה שפתרנו במונחים של צביעה על-ידי שני צבעים (לדוגמה, קשתות בצבע לבן מייצגות היכרות בין שני אנשים, קשתות בצבע שחור מייצגות אי-היכרות). במונחים אלו ינוסח המשפט האחרון כך: "בכל צביעה של קשתות הגרף השלם K_6 על-ידי שני צבעים, יתקבל תת-גרף מטיפוס K_3, שלכל קשתותיו יש אותו צבע" (תת-גרף כזה נקרא "מונוכרומטי"). נשים

[6] לפי הגדרת "פירוק" בפרק ב.5 (IV), תת-הקבוצות בפירוק הינן לא ריקות. לעומת זאת, כשמדובר בתורת הגרפים בצביעה על-ידי k צבעים, אין הכוונה, שחייבים להשתמש ב*כל* הצבעים. לכן התוספת "או פחות" כאן.

לב אבל, שלמרות שמושג הצביעה הוא בעל שם "צבעוני" יותר ממושג הפירוק, הוא בעצם מושג טכני לא פחות (וכמעט זהה במשמעותו למושג הפירוק)!

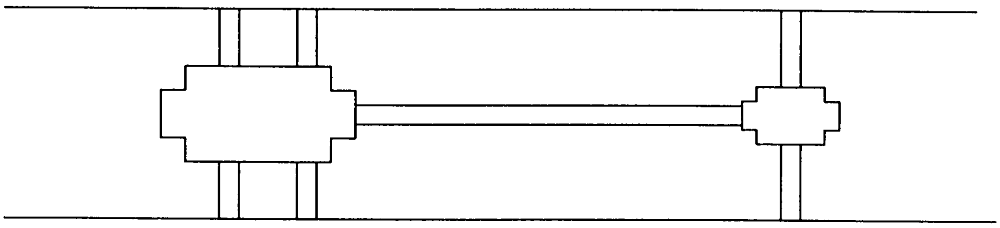
נציין לבסוף, שהמשפט, שהוכחנו בסוף פרק זה הוא מקרה פרטי של משפט יסודי חשוב (בתורת הגרפים בפרט, ובקומבינטוריקה בכלל), הידוע כמשפט *רמזי*. נוסח רחב יותר שלו, אף כי לא הכללי ביותר, הוא:

לכל גרף G ולכל מספר טבעי k, קיים מספר טבעי n, כך שבכל צביעה של קשתות הגרף השלם K_n ב- k צבעים, יש ב- K_n תת-גרף איזומורפי ל- G, שכל הקשתות שלו באותו צבע.

ההוכחה של משפט זה חורגת ממסגרת קורס זה.

ה.2 מסילות ומעגלים

המסורת מייחסת את הולדתה של תורת הגרפים לפתרונה של בעיה קונקרטית, הידועה כ"בעיית הגשרים של קניגסברג". מעשה שהיה כך היה: בעיר קניגסברג שבגרמניה (עירו של קאנט) זורם נהר, ובנהר יש שני איים. כל אחת משתי גדות הנהר מחוברת אל האי הגדול בין השניים באמצעות שני גשרים, ועם הקטן ביניהם – באמצעות גשר אחד. גשר נוסף מחבר את שני האיים (ראו ציור):



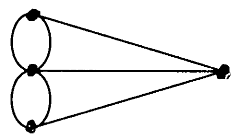
ציור 1

משימה ידועה, שהוצבה בפני המבקרים בעיר, היתה: לתכנן מסלול טיולים, שיעבור דרך כל שבעת הגשרים, אך מבלי לעבור אף אחד מהגשרים יותר מפעם אחת. רבים ניסו את כוחם, אך כולם נכשלו. עד שבא ב-1736 ליאונרד אוילר (מגדולי המתמטיקאים של כל הזמנים) והראה באופן מתמטי, שסיבת הכישלון היא היות המשימה בלתי ניתנת לביצוע באופן עקרוני. בפרק זה אכן נוכיח זאת. מובן, שמה שמעניין אותנו באמת כאן, אינו הפתרון של בעיה ספציפית זו (עם כל חשיבותה ההיסטורית), אלא התיאוריה, המאפשרת את פתרונה של בעיה זו, כמו גם הצורה, שבה מתמודדים מתמטיקאים עם בעיות קונקרטיות כאלו מ"החיים".

נתחיל בסוגייה היותר כללית. ובכן, פתרון מתמטי של בעיות כגון זו של גשרי קניגסברג, כרוך כמעט תמיד ב*שתי* הפשטות. ראשית, כדי לתת פתרון מתמטי לבעיה, יש להציג אותה באופן מתמטי, דהיינו: על-ידי הצגתה בעזרת מבנים מתמטיים מוגדרים היטב, שיפשיטו את הבעיה מכל המרכיבים, שאינם באמת רלוונטיים (כמו: שהיא קשורה בנהר, איים, גשרים וכו'). שנית, המפתח לפתרון בעיה כזו הוא כמעט תמיד ב*הכללתה* ומציאת פתרון, שמטפל בהצלחה לא רק בה, אלא בקבוצה שלמה של

בעיות דומות (במיוחד נכון היה הדבר אם הבעיה היתה עוסקת ב- 700,000 גשרים, במקום רק בשבעה).

בדוגמה של גשרי קניגסברג, כל מה שרלוונטי במצב המתואר בבעיה, מיוצג בצורה שלמה על-ידי גרף מהטיפוס הבא (בו הקדקוד העליון והתחתון מייצגים את שתי גדות הנהר, אלה שבאמצע מייצגים את שני האיים, והקשתות מייצגות את הגשרים).



ציור 2

ייצוג זה הופך את הבעיה לבעיה של תורת הגרפים (שתוגדר בהמשך באופן מדויק). כמו שרמזנו, פתרונה ייעשה על-ידי כך שנמצא *לכל* גרף סופי, אם מסלול מהסוג המתואר בבעיה אפשרי בו או לא.

נתחיל את התמודדותנו עם בעיית גשרי קניגסברג על-ידי הכנסת מושגים, שיאפשרו לנסח אותה באופן מדויק.

הגדרה:

(1) יהי G גרף (מכוון או לא מכוון). *טיול* ב- G הוא רשימה סופית מהצורה

$$p = <v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n>$$

שבה $v_0, \ldots, v_n$ $(n \geq 0)$ הם קדקודים של G, $e_1, \ldots, e_n$ הן קשתות של G, ולכל $1 \leq i \leq n$, e_i מחברת את v_{i-1} ל- v_i. לגבי טיול p כנ"ל אומרים, שהוא *מחבר* את v_0 ל- v_n (או שהוא *בין* v_0 ל- v_n), וכמו כן ש- v_0 ו- v_n הם *הקצוות* שלו, בעוד $v_1, \ldots, v_{n-1}$ הם הקדקודים *פנימיים* שלו. על איברי p אומרים, שהם *על* הטיול p.

(2) טיול p, שבו אף קשת לא חוזרת יותר מפעם אחת, נקרא *מסלול* של G. אם הקצוות שלו זהים (כלומר אם $v_0 = v_n$), אז הטיול נקרא *מעגלי*. אם אף קדקוד פנימי של p לא חוזר ב-p יותר מפעם אחת, אז p נקרא *פשוט*.

(3) אורך של טיול הוא מספר הקשתות שבו.

הערות:

(1) המקרה שבו $n=0$ (כלומר $p=<v_0>$) אפשרי לפי ההגדרה. טיול כזה נקרא *מנוון* (או *טריביאלי*), והוא כמובן מסלול פשוט ומעגלי.

(2) טיול פשוט הוא מסלול (כי אם אף קדקוד פנימי לא חוזר יותר מפעם אחת, אז גם שום קשת לא חוזרת יותר מפעם אחת!).

(3) אם אחד הקדקודים הפנימיים של מסלול זהה לאחד הקצוות, אז המסלול אינו פשוט (כי אותו קדקוד פנימי חוזר פעמיים). לעומת זאת, מסלול מעגלי, שבו כל הקדקודים הפנימיים שונים זה מזה, והם שונים גם מנקודת הקצה, כן נחשב לפשוט.

(4) מהגדרת טיול נובע, שקשת יכולה להימצא עליו רק אם (אך לא בהכרח אם ורק אם!) שני הקצוות שלה נמצאים עליו.

(5) אורך של מסלול ב- $<V, E, F>$ קטן או שווה ל- $|E|$.

(6) נשים לב, שאם p מסלול בגרף מכוון G, אז p הוא גם מסלול בגרף הלא-מכוון, ש-G מבוסס עליו (ההפך *אינו* נכון!).

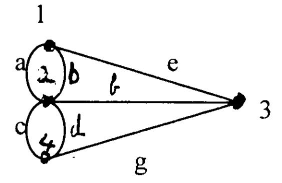
הגדרה:

1. *מסלול אוילר* בגרף הוא מסלול שעובר דרך כל הקשתות וכל הקדקודים של הגרף. *מעגל-אוילר* הוא מסלול אוילר מעגלי.
2. *מסילה* היא גרף, שיש לו מסלול אוילר. *מעגל* הוא גרף, שיש לו מעגל אוילר. מסילה נקראת *פשוטה* אם יש לה מסלול אוילר פשוט. מעגל נקרא *פשוט* אם יש לו מעגל אוילר פשוט.
3. יהי G גרף. *מסילה ב-* G (או "מסילה של G") היא תת-גרף של G המהווה מסילה. *מעגל של* G הוא תת-גרף של G המהווה מעגל.

הערות:

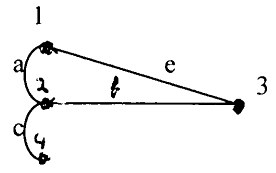
(1) בטקסטים רבים "מסלול אוילר" ב-G מוגדר רק בתור מסלול, שעובר דרך כל הקשתות של G. אם ב- G יש נקודות *מבודדות* (דהיינו: נקודות שאינן נמצאות על שום קשת), אז יש הבדל בין שתי ההגדרות. ב- G כזה לא ייתכן כלל מסלול אוילר לפי הגדרתנו (אלא אם כן יש בו קדקוד אחד בדיוק), אך עדיין ייתכן מסלול אוילר לפי ההגדרה הדורשת פחות. בחירתנו בהגדרה למעלה מאפשרת ניסוח פשוט ו"נקי" יותר של המשפטים. אין אבל כל בעיה לנסח את המשפטים הללו מחדש עם ההגדרה האחרת.

(2) "מסלול בגרף G" ו"מסילה בגרף G" הם מושגים, שיש ביניהם קשר הדוק, אך הם אינם זהים. בעוד מסלול של G הינו רשימה (מסודרת!) של קדקודים וקשתות של G, "מסילה בגרף G" הינה תת-גרף של G. כדי להדגים את ההבדל, נתבונן בגרף G_0 הבא (שהוא מטיפוס הגרף שמופיע בציור 1):



ציור 3: הגרף G_0

תת-ה-גרף הבא של G_0 הינו *מסילה* של G_0:



ציור 4

כדי להיווכח, שאכן כך הדבר, עלינו להציג *מסלול*, שעובר דרך כל הקשתות והקדקודים של גרף זה. למעשה, יש (בדיוק!) ארבעה מסלולים כאלה:

$$<4, c, 2, a, 1, e, 3, f, 2>$$
$$<4, c, 2, f, 3, e, 1, a, 2>$$
$$<2, a, 1, e, 3, f, 2, c, 4>$$
$$<2, f, 3, e, 1, a, 2, c, 4>$$

(3) מרבית הטקסטים משתמשים במונח "מעגל" הן במובן שהגדרנו למעלה, והן במקום המונח "מסלול מעגלי". בהמשך ננהג כך גם אנו, ועל הקוראים יהיה להחליט למה הכוונה בכל מקרה. (למעשה כבר נהגנו כך, עת הגדרנו "מעגל אוילר". מעגל כזה אינו מעגל כלל לפי הגדרותינו, אלא מסלול מעגלי!).

כפי שראינו בדוגמה האחרונה, למסילה בגרף G יכולים להתאים מספר מסלולים של G. ברור, לעומת זאת, שכל מסלול ב- G קובע מסילה יחידה של G (שקדקודיה וקשתותיה הן אלה הנמצאים על מסלול זה). כדאי לציין גם, שבעוד קל לברר לפי ההגדרה, אם רשימה מסוימת מהווה מסלול של G, אין זה כה קל לברר לפי ההגדרה, אם תת-גרף מסוים של G מהווה מסילה של G. למעשה, את בעיית גשרי קניגסברג אנו יכולים עתה לנסח (סוף סוף) בצורה המדויקת הבאה:
האם G_0 של ציור 3 (או כל גרף אחר מהטיפוס המתואר בציור 2) מהווה מסילה? (דהיינו: האם יש בו מסלול אוילר?).

אפשר לפתור בעיה ספציפית זו על-ידי עריכת רשימה מלאה של כל המסלולים, שיש ב- G_0, ובדיקה אם אחד מהם הוא מסלול אוילר. הרבה יותר מעניין (ומעשי!) למצוא תנאים כלליים, קלים לבדיקה, שעבור *כל* גרף יהוו ביחד תנאים הכרחיים ומספיקים לקיום מסלול אוילר בו. כדי לנסח תנאים כאלה נצטרך להכניס כמה מושגים יסודיים נוספים של תורת הגרפים. תחילה נסקור אבל מספר פעולות על טיולים ומסלולים, שנזדקק להם בהמשך.

(א) **הוצאת תת-טיול**: אם $<v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n>$ טיול ו- $0 \le i \le j \le n$, אז הרשימה $<v_i, e_{i+1}, \ldots, e_j, v_j>$ נקראת תת-טיול שלו. נשים לב שתת-טיול של טיול הוא בעצמו טיול, ותת-טיול של מסלול הוא בעצמו מסלול (ולכן נדבר פשוט על תת-מסלול במקרה זה), והוא פשוט, אם המסלול המקורי פשוט.

(ב) **היפוך**: אם רשימה מסוימת $(<v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n>)$ מהווה טיול, אז הרשימה $<v_n, e_n, v_{n-1}, \ldots, v_1, e_1, v_0>$ מהווה טיול גם היא. יתר על כן: היפוך של מסלול מהווה בעצמו מסלול (והוא פשוט, אם המסלול המקורי פשוט).

(ג) **השמטת קטע מעגלי** (ממסלול לא פשוט):
אם $<v_0, e_1, \ldots, v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \ldots, e_j, v_j, e_{j+1}, \ldots, v_n>$ טיול, $0 \le i, j \le n$ ו- $v_i = v_j$, אז הרשימה המתקבלת מטיול זה על-ידי השמטת הקטע בין v_i ל- v_j (דהיינו, הרשימה $<v_0, e_1, \ldots, v_i, e_{j+1}, v_{j+1}, \ldots, v_n>$ גם היא טיול בין אותם שני קדקודים. אם הרשימה המקורית היא מסלול, אז כך גם הרשימה החדשה.

(ד) חיבור טיולים: אם $<v_0, \dots, v_n>$ ו- $<v'_0, e'_1, v'_1, \dots, v'_k>$ הן טיולים ו- $v_n = v'_0$ (כלומר: הסיום של טיול אחד הוא ההתחלה של הטיול השני), אז חיבורן הוא הרשימה $<v_0, \dots, v_n, e'_1, v'_1, \dots, v'_k>$,[1] המהווה טיול בעצמה.

(ה) הזזת מעגלים: אם $<v_0, e_1, \dots, v_i, \dots, e_n, v_0>$ הוא טיול (מסלול/מסלול פשוט) מעגלי, אז כך גם $<v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \dots, e_n, v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i>$. לטיול זה יש כמובן בדיוק אותם קשתות וקדקודים כמו של הטיול המקורי.

את הבדיקה הקלה של כל הטענות, שנכללו בתיאור הפעולות (א)-(ה) למעלה, נשאיר לקוראים. נעיר רק, שהפעולה האחרונה היא למעשה צירוף של שתיים קודמות: תחילה יוצרים את תתי-הטיולים $<v_0, \dots, v_i>$ ו- $<v_i, e_{i+1}, \dots, v_0>$ של הטיול המקורי, ואז מחברים אותם מחדש, בסדר הפוך.

הערה:
משמעות הטענה ב-(ה) הינה, שכל קדקוד של מעגל מהווה את נקודת ההתחלה והסיום של איזשהו מסלול מעגלי, שעובר דרך כל הקשתות והקדקודים של אותו מעגל.

נעבור עתה למושגים החדשים, שנזדקק להם לצורך פתרון בעייתנו.

הגדרה:
שני קדקודים של גרף G נקראים *קשורים* ב- G, אם יש טיול, שמחבר ביניהם. גרף נקרא *קשיר*, אם כל שני קדקודים שלו הינם קשורים.

דוגמה: הגרפים בציורים 3 ו-4 הם קשירים.

הטענה הבאה מספקת הגדרות אלטרנטיביות למושג הקשירות.

טענה 1:
(1) שני קדקודים של גרף G הם קשורים, אם"ם יש מסלול ב- G המחבר אותם.
(2) שני קדקודים של גרף G הם קשורים, אם"ם יש מסלול פשוט ב- G המחבר אותם.

[1] בטקסטים מסוימים משתמשים במונח "שרשור" במקום ה"חיבור" שלנו. מונח זה לא מתאים להגדרות בספר *זה*, כיוון שבשרשורן של שתי הרשימות (לפי השימוש הרגיל של מושג זה) יופיע הקדקוד v_n פעמיים רצוף (פעם בתור v_n, פעם בתור v'_0).

הוכחה:
כיוון שכל מסלול פשוט הוא מסלול, וכל מסלול הוא טיול, מספיק להוכיח, שאם x ו- y קשורים ב- G, אז יש מסלול פשוט, שמחבר אותם. יהיו אפוא x ו- y קשורים, ויהי p הטיול הקצר ביותר המחבר אותם. p זה הינו בהכרח מסלול פשוט, משום שאם קדקוד v חוזר בו פעמיים, אז נוכל להשמיט מ-p את הקטע המעגלי המחבר את שני המופעים השונים הראשונים של v, ולקבל טיול חדש בין x ל- y, שהוא קצר יותר מ- p (בסתירה לבחירת p).

העובדה הבסיסית החשובה ביותר על יחס הקשירות ניתנת בטענה הבאה:

טענה 2:
יחס הקשירות הינו יחס שקילות.

הוכחה:
(א) רפלקסיביות: כל קדקוד v_0 בגרף G מחובר לעצמו על-ידי הטיול $<v_0>$.
(ב) סימטריות: אם הטיול p מחבר את הקדקוד x ל- y, אז היפוכו של p הוא טיול המחבר את y ל- x.
(ג) טרנזיטיביות: נניח ש-x קשור ל- y, ו- y קשור ל- z. נניח שהטיול p_1 מחבר את x ל- y, והטיול p_2 מחבר את y ל- z. אז החיבור של p_1 ו- p_2 מוגדר (כי נקודת הסיום של p_1 היא נקודת ההתחלה של p_2), והוא מחבר את x ל- z.

הגדרה:
תת-הגרפים של G, המושרים על-ידי מחלקות השקילות של יחס הקשירות על קבוצת הקדקודים של G, נקראים *רכיבי הקשירות* של G. גרף G הינו קשיר, אם"ם יש לו רכיב קשירות יחיד.

תרגיל
נניח שהגרף G' מתקבל מהגרף G על-ידי תוספת קשת אחת, המחברת קדקודים מרכיבי קשירות שונים. הוכח כי שני רכיבי קשירות אלה של G מתאחדים ב- G' לרכיב קשירות אחד, בעוד שאר הרכיבים נשארים ללא שינוי. (מה קורה אם מוסיפים ל- G קשת בין שני קדקודים באותו רכיב קשירות?).

קשירות היא, באופן כללי, תכונה חשובה מאוד של גרף. חשיבותה לפרק ספציפי זה נובעת מהטענה הבאה:

טענה 3:

כל מסילה היא גרף קשיר.

הוכחה:

אם G מסילה, אז יש מסלול p שעובר דרך כל הקדקודים של G. בפרט כל שני קדקודים של G מחוברים על-ידי הקטע (או תת-המסלול) של p הנמצא ביניהם.

קשירות היא רק תנאי ***הכרחי*** לקיום מסלול אוילר בגרף. כך למשל, הגרף G_0 של ציור 3 מהווה (כמו שנראה) דוגמה לגרף קשיר שאינו מסילה. כדי לנסח תנאי, שיהיה הכרחי ומספיק עבור כל גרף סופי, עלינו להכניס מושג בסיסי נוסף: מושג ***הדרגה***. קל אבל יותר להכניס מושג זה תחילה לגרפים מכוונים דווקא.

מעתה והלאה נניח, שאנו עוסקים בגרפים ***סופיים*** בלבד.

הגדרה:

יהי G גרף מכוון. ***דרגת הכניסה*** של קדקוד v בגרף, $d_G^+(v)$, היא מספר הקשתות המסתיימות ב- v, בעוד ***דרגת היציאה*** של v, $d_G^-(v)$, היא מספר הקשתות המתחילות בו. הדרגה של v, $d_G(v)$, מוגדרת בתור $d_G^+(v)+d_G^-(v)$.

טענה 4:

בגרף מכוון $<V, E, F>$ מתקיים:

$$\sum_{v\in V} d_G^+(v)=\sum_{v\in V} d_G^-(v)=|E|$$

הוכחה:

תהי E_v קבוצת הקדקודים המסתיימים ב- v. אז $|E_v|=d_G^+(v)$ ו- $E=\biguplus_{v\in V} E_v$. לכן

$|E|=\sum_{v\in V} d_G^+(v)$. באופן דומה מראים ש- $\sum_{v\in V} d_G^-(v)=|E|$.

כבסיס להגדרת דרגה של קדקוד בגרף לא מכוון תשמש הטענה הבאה.

טענה 5:

אם G גרף לא מכוון, ו- G' הוא גרף מכוון המבוסס עליו, אז הדרגה ב- G' של קדקוד v שווה לסכום של מספר הקשתות (כולל לולאות) ב- G, ש- v נמצא עליהן, ושל מספר הלולאות, ש- v נמצא עליהן (במלים אחרות: הדרגה שווה למספר הקשתות ש- v נמצא עליהן, כשלולאות נספרות פעמיים).

הוכחה:

יהי v קדקוד. נסמן ב- O_v את קבוצת הקשתות ב- G, שמתחילות ב- v בגרף המכוון G', ב- I_v את קבוצת הקשתות של G, שמסתיימות ב-v בגרף G', וב- E_v את קבוצת הקשתות ב- G, ש- v נמצא עליהן. אז $E_v = O_v \cup I_v$, ולכן:

$$|E_v| = |O_v| + |I_v| - |I_v \cap O_v|$$

$$|O_v| + |I_v| = |E_v| + |I_v \cap O_v|$$

אבל $\left|O_v\right| = d^-_{G'}(v)$, $\left|I_v\right| = d^+_{G'}(v)$, ולכן $|O_v| + |I_v| = d_{G'}(v)$. מצד שני, $I_v \cap O_v$ היא בדיוק קבוצת הלולאות, ש- v נמצא עליהן (דהיינו: קבוצת הקשתות ב- G, שב- G' הן גם מתחילות ב- v וגם נגמרות בו). מכאן שהשוויון האחרון מבטא בדיוק את מה שצריך להוכיח.

מסקנה 1:

לקדקוד של גרף לא מכוון G יש אותה דרגה בכל הגרפים המכוונים, המבוססים על G.

הדרגה של קדקוד בגרף לא מכוון G מוגדרת כך, שתהיה שווה לדרגה המשותפת, שיש לו בכל הגרפים המכוונים המבוססים על G. לאור הטענה האחרונה, ההגדרה הפורמלית היא:

הגדרה:

הדרגה $d_G(v)$ של קדקוד v בגרף מוגדרת כסכום של מספר הקשתות, ש- v נמצא עליהן, ומספר הלולאות, שהוא נמצא עליהן (במלים אחרות: כל לולאה "נספרת פעמיים").

טענה 6:

סכום הדרגות של כל הקדקודים בגרף שווה לפעמיים מספר הקשתות.

הוכחה:

נניח ש- $G = \langle V, E, F\rangle$. יהי $G' = \langle V, E', F'\rangle$ גרף מכוון המבוסס עליו. אז $|E'| = |E|$,

$$\sum_{v\in V} d_G(v) = \sum_{v\in V} d_{G'}(v) = \sum_{v\in V}(d^+_{G'}(v) + d^-_{G'}(v)) = \sum_{v\in V} d^+_{G'}(v) + \sum_{v\in V} d^-_{G'}(v) =$$

$$= \left|E'\right| + \left|E'\right| = 2\left|E'\right| = 2\left|E\right|$$

הערה:
הסבר אינטואיטיבי לטענה האחרונה הוא, שכשמחברים את הדרגות של כל הקדקודים, אז כל קשת נספרת פעמיים. (זה כולל, לפי הגדרה, את הלולאות!). מכאן שסכום זה שווה לפעמיים מספר הקשתות.

%%
זהו הסבר אינטואיטיבי בלבד, משום שהמושג של "ספירת קשת פעמיים" דורש הבהרה, ובמיוחד באיזה מובן, כשאנו מחברים מספרים, אנו בעצם סופרים קשתות (ועוד פעמיים!). ניתן אבל בהחלט להפוך הסבר זה להוכחה, שמשתמשת במושגים מוגדרים היטב ובעקרונות שהכרנו. הדבר יכול להיעשות, למשל, כך:
יהי $G = <V, E, F>$ גרף. נגדיר:

$$A = \{<v, e, 1> \mid e \in E \wedge v \in V \wedge v \in F(e)\} \cup \{<v, e, 2> \mid e \in E \wedge v \in V \wedge F(e) = \{v\}\}$$

נספור עתה את מספר איברי A בשתי דרכים: אחת לפי הקדקודים, אחת לפי הקשתות.

ספירה לפי הקדקודים: נגדיר עבור קדקוד v:

$$A_v = < x \in A \mid \pi_1^3(x) = v >$$

קל לראות ש- $|A_v| = d_G(v)$. כמו-כן, $A = \biguplus_{v \in V} A_v$. לכן

$$|A| = \sum_{v \in V} d_G(v)$$

ספירה לפי הקשתות: נגדיר עבור קשת e:

$$A_e = < x \in A \mid \pi_2^3(x) = e >$$

אז $A = \biguplus_{e \in E} A_e$. הפעם אבל $|A_e| = 2$ לכל $e \in E$ ($A_e = \{<v_1, e, 1>, <v_2, e, 1>\}$, אם e מחברת את v_1 ו- v_2 ו- $v_1 \neq v_2$, $A_e = \{<v_0, e, 1>, <v_0, e, 2>\}$ אם e היא לולאה ב- v_0).
לכן $|A| = 2|E|$.

בסך-הכל קיבלנו:

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$$

%%

הטענה הבאה על דרגות אינה חשובה לצורך מטרתו העיקרית של הפרק, אך היא מדגימה את צורת החשיבה הקשורה במושג הדרגה, והוכחתה תשמש לנו תזכורת של עיקרון שובך היונים, אותו הכרנו בפרק ג.6.

טענה 7:

בכל גרף פשוט בעל שני קדקודים לפחות יש שני קדקודים, שדרגותיהם שוות.

הוכחה:

נניח שמספר הקדקודים הוא n וש- $n \geq 2$ (ולכן $n - 1 > 0$). כיוון שהגרף פשוט, דרגת כל קדקוד היא $n - 1$ לכל היותר (אפשר לחבר קדקוד ל- $n - 1$ הקדקודים הנותרים). עתה לא ייתכן שיש גם קדקוד שדרגתו 0 (דהיינו: קדקוד שאינו מחובר בקשת לאף קדקוד אחר), וגם קדקוד שדרגתו $n - 1$ (דהיינו: קדקוד המחובר בקשת לכל קדקוד אחר). מכאן שאו שדרגות כל הקדקודים הן בין 0 ל- $n - 2$, או שדרגות כולם הן בין 1 ל- $n - 1$. בשני המקרים יש $n - 1$ ערכים אפשריים של הדרגות של n הקדקודים, ולכן לפי עיקרון שובך היונים יש שני קדקודים, שדרגתם זהה.

נחזור עתה למסלולי אוילר, ולמקום המרכזי של מושג הדרגה בחקירתם.

טענה 8:

(1) אם G מעגל (כלומר ב- G יש מסלול אוילר מעגלי), אז דרגת כל קדקוד של G הינה זוגית.

(2) אם G גרף שיש בו מסלול אוילר שאינו מעגלי, אז יש ב- G בדיוק שני קדקודים שדרגתם אי-זוגית (והם מהווים את קצות המסלול הנ"ל).

הוכחה:

(1) יהי $c = <v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n>$ מסלול אוילר ב- G. יהי G' הגרף המכוון המבוסס על G, שבו הכיוון של הקשת e_i הוא מ- v_{i-1} ל- v_i (כיוון שמדובר במסלול אוילר, כל קשת של G מופיעה בו פעם אחת ויחידה, ולכן זה מגדיר כיוון יחיד *לכל* קשת). ברור ש- c הוא גם מסלול אוילר ב- G'. עתה, אם c הוא מסלול מעגלי (כלומר $(v_0 = v_n$), אז לכל קדקוד v, מספר הקשתות ב- c הנכנסות ל- v שווה למספר הקשתות בו היוצאות מ- v. (תרגיל: הוכח זאת באופן פורמלי, על-ידי בניית פונקציית שקילות מתאימה). כיוון ש- c מכיל את כל הקשתות של G, פירוש הדבר ש- $d_{G'}^{+}(v) = d_{G'}^{-}(v)$ לכל קדקוד v. כיוון ש- $d_G(v) = d_{G'}(v) = d_{G'}^{+}(v) + d_{G'}^{-}(v)$, נקבל ש- $d_G(v) = 2d_{G'}^{+}(v)$ לכל v. מכאן ש- $d_G(v)$ הינו זוגי.

(2) סעיף זה יושאר כתרגיל לקוראים.

מסקנה 2:
במסילה מספר הקדקודים, שיש להם דרגה אי-זוגית, הוא 0 או 2. יתר על כן:

(i) אם דרגת כל הקדקודים הינה זוגית, אז כל מסלול אוילר דרכה חייב להיות מעגל אוילר (והמסילה הינה מעגל).

(ii) אם יש במסילה שני קדקודים שדרגתם אי-זוגית, אז כל מסלול אוילר דרכה מחבר שני קדקודים אלו (קדקודים אלו נקראים לכן *קצות המסילה*).

הערה:
ממסקנה 2 נובע, שלמרות שייתכנו במסילה מסלולי אוילר רבים, זהותם של הקצוות (כאשר יש כאלה) אינה תלויה בבחירה של המסלול (הגרף בציור 4 מהווה דוגמה טובה לכך). לעומת זאת מסתבר, שכאשר מסילה היא מעגל, אז *כל* מסלול אוילר דרכה הינו מעגלי (הגדרת מעגל דורשה רק שיש *איזשהו* מסלול מעגלי!). מעתה נוכל לכן להבדיל בין מעגל ובין מסילה שאינה מעגל. בסוג הראשון, כל מסלולי אוילר הם מעגליים. בסוג השני – אף אחד מהם אינו מעגלי.

טענה 3 ומסקנה 2 מספקות, כל אחת, תנאי *הכרחי* לקיום מסלול אוילר בגרף, אבל אף אחד מהתנאים אינו כשלעצמו מספיק (הראו זאת!). המשפט הבא (שהוא המשפט המרכזי של הפרק) מראה, ש*הצירוף* שלהם אכן מהווה תנאי הכרחי ומספיק.

משפט:
בגרף יש מסלול אוילר (כלומר, הגרף הוא מסילה) אם"ם הוא קשיר, ומספר קדקודיו, שדרגתם היא אי-זוגית, הוא 0 או 2.

הוכחה:
הכרחיות התנאים הוכחה בטענה 3 ומסקנה 2.
בשביל המספיקות, נניח תחילה ש- G הוא גרף קשיר, שדרגת כל קדקודיו היא זוגית, ונראה שיש בו מעגל אוילר. בשביל זה די להראות שכל מסלול ב- G, שאורכו מקסימלי (כלומר: אין שום מסלול אחר ב- G, שהוא ארוך יותר), חייב להיות מעגל אוילר ב- G. יהי אפוא c מסלול מקסימלי כזה. נראה תחילה ש- c הוא מעגלי. נניח שלא. יהי v_0 קדקוד הראשית של c. כיוון ש- c אינו מעגל, יש מספר אי-זוגי של קשתות על c, ש- v_0 הוא קצה שלהן (כשלולאות נספרות פעמיים). כיוון שדרגת v_0 זוגית, פירוש הדבר שיש קשת e, ש- v_0 נמצא עליה, אך אינה נמצאת על c. אם e מחברת את v_0 לקדקוד x, אז חיבורם של המסלול $<x, e, v_0>$ ושל c נותן מסלול ארוך מ- c, בסתירה למקסימליות c.

נראה עתה, של- c התכונה הבסיסית הבאה: אם v_0 קדקוד על c, ו- e קשת ש- v_0 נמצאת עליה, אזי e (וממילא גם הקצה השני שלה) נמצאת על c. נניח בשלילה, שאין

הדבר כך. כיוון ש- c מעגלי, אפשר לבצע בו הזזה, ולקבל מסלול מעגלי c' בעל אותו אורך, ועם אותם קשתות וקדקודים, המתחיל (ונגמר) ב- v_0. אפשר עתה לצרף ל- c' את הקשת e (עם הקצה השני שלה) ולקבל מסלול חדש, שהינו ארוך ב- 1 מ- c. זוהי אבל שוב סתירה למקסימליות c.

בעזרת התכונה הבסיסית הזו של c ניתן להוכיח בקלות, שאם p הינו מסלול ב- G המתחיל בנקודה על c, אז כל הקשתות והקדקודים של p נמצאים על c (הוכחה מלאה נעשית באינדוקציה על האורך k של p. שלב הבסיס, בו $k = 0$, הוא טריביאלי, כי אז $p = <v_0>$. שלב המעבר נעשה בעזרת התכונה הבסיסית של c, שהוכחנו).
יהי עתה v קדקוד כלשהו של G, ויהי v_0 קדקוד על c. כיוון ש- G קשיר, יש מסלול המחבר את v_0 ל- v, ולכן לפי מה שזה עתה הראינו, v חייב להיות על c.
תהי לבסוף e קשת של G. כיוון שהקצוות של e הם על c (כי *כל* הקדקודים של G הם על c!), אז e בעצמה הינה על c (שוב – לפי התכונה הבסיסית של c, שהראינו קודם).

הראינו ש- c מסלול מעגלי, שכל הקדקודים והקשתות של G נמצאים עליו. מכאן ש- c הוא מעגל אוילר ב- G (ו- G הינו מעגל).

הראינו שאם G גרף קשיר, שמספר הקדקודים בעלי דרגה אי-זוגית בו הוא 0, אז G מעגל. נניח עתה ש- G הוא גרף קשיר, שיש בו בדיוק שני קדקודים, x ו- y, שדרגתם אי-זוגית. נוסיף עתה ל- G קשת חדשה e בין x ל- y, ונקבל כך גרף חדש G'. G' הוא עדיין קשיר כמובן, ודרגת *כל* קדקודיו היא זוגית. לפי מה שהראינו יש לכן ב- G' מעגל אוילר. על-ידי הזזתו (ואולי היפוכו) ניתן להניח, שמעגל זה מתחיל ב- x ובקשת e (כלומר: הוא מהצורה $<x, e, y, \ldots, x>$. אז תת-המסלול של מעגל אוילר זה בין y ל- x (כלומר, המסלול ללא הקשת e) הוא מסלול אוילר בגרף G, שעובר דרך כל הקדקודים והקשתות של e. במלים אחרות: הוא מסלול אוילר ב- G (שלא במפתיע, הוא מחבר כמובן את שני הקדקודים ב- G, שדרגתם אי-זוגית).

תרגיל

הראה, שאם נגדיר "מסלול-אוילר" כמסלול המכיל את כל הקשתות של G (אך לא בהכרח את כל הקדקודים), אז ב- G יש מסלול כזה אם"ם מספר הקדקודים שדרגתם אי-זוגית הוא 0 או 2, וכל שני קדקודים, שדרגתם שונה מאפס, הם קשורים.

בשלב זה נוכל סוף-סוף לספק פתרון מלא לבעיית הגשרים של קניגסברג.

דוגמאות:

(1) בגרף G_0 (ציור 3) אין מסלול אוילר, ולכן לבעיית גשרי קניגסברג אין פתרון.

(2) אם לגרף G_0 נוסיף קשת כלשהי (שאינה לולאה) בין שניים מקדקודיו, נקבל גרף שיש בו מסלול אוילר.

הסבר:
בגרף G_0 הדרגה של כל הקדקודים היא אי-זוגית. כיוון שמספר הקדקודים הוא 4, לא ייתכן, לפי המשפט האחרון, שיש בו מסלול אוילר. לעומת זאת, אם נוסיף לו קשת, שאינה לולאה, נקבל גרף, שבו לשני קדקודים (קצוות הקשת שהוספנו) יש דרגה זוגית, בעוד לשאר – דרגה אי-זוגית. לכן יש מסלול אוילר (שאינו מעגלי) בגרף זה.

הערות:
(1) למעשה, על מנת להראות, שב- G_0 *אין* מסלול אוילר, אין צורך במשפט האחרון. מסקנה 2 לפניו (שהוכחתה קלה בהרבה) מספיקה. לעומת זאת, על מנת להראות, שעל-ידי הוספה ל- G_0 של קשת כלשהי (שאיננה לולאה) מקבלים מסילה, השתמשנו אכן במשפט האחרון. יכולנו כמובן להראות זאת גם על-ידי בדיקת כל האפשרויות להוסיף קשת ל- G_0, ומציאת מסלולי אוילר בגרפים המתקבלים. זו דרך ארוכה הרבה יותר, ואינה פרקטית, כשמספר הקדקודים בגרף גדול.

(2) המשפט האחרון נוסח כמשפט קיום טהור: הוא קובע, שבתנאים מסוימים (קלים לבדיקה) יש מסלול אוילר. כדאי לשים לב אבל, שההוכחה שלו היתה *קונסטרוקטיבית*, ולכן אפשר להוציא ממנה *אלגוריתם* למציאה של מסלול אוילר בגרף, כאשר זה קיים (כלומר: כשהתנאים המתוארים במשפט מתקיימים). ואכן, ההוכחה מאפיינת מסלול אוילר במסילה כמסלול שלה, שיש לו אורך מקסימלי. בחינה לעומק של ההוכחה מראה עוד, שהיא כוללת למעשה פרוצדורה איך אפשר, בהינתן מסלול שאינו מסלול מקסימלי, למצוא מסלול ארוך יותר. אם נתחיל אפוא במסלול בעל קשת יחידה (או אפילו ממסלול מנוון, ללא קשתות!), נוכל להפעיל פרוצדורה זו שוב ושוב, וכשהגרף הנ"ל סופי, הרי בהכרח נגיע אחרי מספר פעמים למסלול בעל אורך מקסימלי. אם הגרף הוא מסילה, אז לפי הוכחת המשפט, מסלול זה יהווה מסלול אוילר באותו גרף (ניתן לכתוב בקלות תכנית מחשב, שתיישם אלגוריתם זה!).

תרגילים

הוכח:

1. כל מסילה לא פשוטה מכילה תת-גרף, שהוא מעגל שאינו מנוון.
2. כל שני קדקודים שונים במסילה p הם קדקודי הקצה של מסילה p', שהיא תת-גרף של p. אם p פשוטה ואינה מעגל, אז p' זו היא יחידה.

ה.3 עצים ויערות

פרק זה מוקדש לסוג מיוחד של גרפים, שיש לו חשיבות רבה במתמטיקה, ועוד יותר – במדעי המחשב: עצים.

בטרם נתחיל, נזכיר לקוראים, שבחלק זה במונח "גרפים" כוונתנו לגרפים סופיים. עוד קונוונציה טרמינולוגית נוחה, שנאמץ בפרק זה, היא, שבמונח "מעגל" נתכוון ל*מעגל לא מנוון* (דהיינו: מעגל, שיש בו לפחות קשת אחת). הסכם זה מאפשר ניסוח קצר ובהיר יותר של ההגדרות והמשפטים, והוא תואם את המקובל בספרות.

הגדרה 1:

(א) לגרף, שאין בו מעגלים, קוראים *יער*.

(ב) לגרף קשיר, שאין בו מעגלים, קוראים *עץ*.

עץ הינו, אפוא, *יער קשיר*. יער, מצד שני, הינו גרף, שכל רכיבי הקשירות שלו הינם עצים.

תרגיל

הוכח את הטענה האחרונה.

עיקר המשפטים בפרק זה יוקדש לאפיונם של יערות ועצים. נפתח במשפט המאפיין יערות. לצורך הוכחתו נזדקק לטענה הבאה, שיש לה חשיבות בפני עצמה.

משפט 1:

בכל גרף G, שדרגת כל קדקודיו היא 2 לפחות, יש מעגל.

הוכחה:

יהי $p = <v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n>$ מסלול ב- G, שאורכו מקסימלי (כיוון ש- G סופי, מסלול כזה קיים, כי אורך כל מסלול אינו יכול לעלות על מספר הקשתות של G). המסלול p חייב לכלול את כל הקשתות, ש- v_n נמצא עליהן (לו היתה קשת e מחוץ ל- p, ש- v_n נמצא עליה, היינו יכולים להוסיף אותה ואת הקצה השני שלה ל- p, ולקבל

כך מסלול ארוך מ- p). כיוון ש- $d_G(v_n) \geq 2$, פירוש הדבר הוא, שחייב להיות $i < n$, כך ש- $v_i = v_n$. מכאן, שעבור i זה $<v_i, e_{i-1}, \ldots, e_n, v_n>$ הינו מעגל.[1]

מסקנה 1:

אם G יער, אז יש ב- G קדקוד, שדרגתו 0 או 1.

משפט 2:

גרף G הינו יער, אם"ם בכל תת-גרף שלו יש קדקוד, שדרגתו 0 או 1.

הוכחה:

כיוון שברור, שכל תת-גרף של יער הוא בעצמו יער, ה"רק אם" נובע ממסקנה 1. לכיוון ההפוך, נניח שבכל תת-גרף של G יש קדקוד, שדרגתו 0 או 1. כיוון שבמעגל דרגת כל קדקוד 2 לפחות, פירוש הדבר שאין ב- G מעגלים.

הגדרה 2:

(א) קדקוד בגרף, שדרגתו 0, נקרא קדקוד ***מבודד***.

(ב) קדקוד בגרף, שדרגתו 1, נקרא ***עלה***.

את משפט 2 נוכל לכן לנסח כך: גרף G הינו יער, אם"ם בכל תת-גרף שלו יש קדקוד מבודד או עלה.

מסקנה 2:

גרף G הינו עץ אם"ם הוא קשיר, ובכל תת-גרף שלו יש קדקוד, שדרגתו 0 או 1.

תרגיל

בכל עץ, שמספר קדקודיו גדול מ- 1, יש לפחות שני עלים. (רמז: ניקח מסלול p בעל אורך מקסימלי. p אינו יכול להיות מעגלי או מנוון, ושני קצותיו חייבים להיות עלים.)

משפט 3:

יהי $G = <V, E, F>$.

(א) אם G יער, אז $|E| \leq |V| - 1$.

(ב) אם G קשיר, אז $|E| \geq |V| - 1$.

(ג) אם G הינו עץ, אז $|E| = |V| - 1$.

---

[1] ייתכן ש- $i = n - 1$, ואז e_n הינה לולאה. לולאה היא אכן מעגל, שאורכו 1.

הוכחה:

(א) באינדוקציה על $|V|$.

בסיס האינדוקציה: נניח $|V| = 1$. במקרה זה כל קשת היא בהכרח לולאה. כיוון שכל לולאה היא מעגל, ואילו G הוא יער, הרי מספר הקשתות חייב להיות 0 (ולכן $|V| - 1 = |E| = 0$ במקרה זה).

שלב המעבר: נניח נכונות הטענה כאשר $|V| = n$, ונניח $|V| = n + 1$. כיוון ש- G יער, יש בו לפי מסקנה 1 קדקוד v_0, שדרגתו 0 או 1. יהי $V' = V - \{v_0\}$, ויהי $G' = <V', E', F'>$ תת-הגרף של G, המושרה על-ידי V'. כיוון ש- $d_G(v_0) \le 1$, E' מכיל את כל הקשתות של G, פרט אולי לאחת. לכן $|E| \le |E'| + 1$. מצד שני, G' הוא יער עם n קדקודים, ולכן $|E'| \le |V'| - 1$ לפי הנחת האינדוקציה. מכאן ש- $|E'| \le |V| - 2$, ולכן:

$$|E| \le |E'| + 1 \le (|V| - 2) + 1 = |V| - 1$$

(ב) נניח G קשיר. יהי $x_0 \in V$. נבנה פונקציה $f : (V - \{x_0\}) \to E$ באופן הבא: לכל קדקוד y, השונה מ- x_0, נבחר מסלול בעל אורך מינימלי מ- x_0 אל y (קיים, כי G קשיר), ונתאים ל- y את הקשת האחרונה במסלול זה. נוכיח עתה, ש- f זו הינה ח.ח.ע., ומזה ינבע ש- $|E| \ge |V - \{x_0\}| = |V| - 1$.

נניח בשלילה, ש- f לא ח.ח.ע.. אז קיימים $y_1, y_2 \in V$ ו- $e \in E$, כך ש- $f(y_1) = f(y_2) = e$, אבל $y_1 \neq y_2$. כיוון שמהגדרת f ברור, שכל קדקוד y הוא נקודת קצה של $f(y)$, y_1 ו- y_2 הם שני הקצוות של e. מהגדרת f נובע גם, שקיימים מסלולים p_1 ו-p_2, כך ש- p_1 הוא מסלול באורך מינימלי מ- x_0 ל- y_1, p_2 הוא מסלול באורך מינימלי מ- x_0 ל- y_2, ו- e היא הקשת האחרונה בשניהם. לכן ל- p_1 ול- p_2 הצורה הבאה:

$$p_1 = <x_0, e_1, \ldots, e_n, y_2, e, y_1>$$

$$p_2 = <x_0, e'_1, \ldots, e'_k, y_1, e, y_2>$$

עתה, $<x_0, e'_1, \ldots, e'_k, y_1>$ הוא מסלול מ- x_0 אל y_1. לכן אורכו גדול או שווה לזה של p_1, דהיינו: $k \ge n + 1$ (ולכן $k > n$). מצד שני $<x_0, e_1, \ldots, e_n, y_2>$ הוא מסלול מ- x_0 אל y_2, ולכן אורכו גדול או שווה לזה של p_2, דהיינו $n \ge k + 1$ (ולכן $n > k$). קיבלנו סתירה, כי לא ייתכן,שגם $n > k$ וגם $k > n$.

(ג) סעיף זה נובע מיידית משני קודמיו (והגדרת עץ כיער קשיר).

מסקנה 3:

התנאים הבאים שקולים עבור גרף $G = <V, E, F>$:

(א) G עץ.

(ב) G חסר מעגלים ו- $|E| = |V| - 1$.

(ג) G חסר מעגלים מקסימלי, כלומר: G חסר מעגלים, אך על-ידי הוספת קשת כלשהי ל- E (בין קדקודים של V) נקבל גרף שיש בו מעגלים.[2]

הוכחה:

(א) $\Leftarrow$ (ב): מיידי מהגדרת עץ וסעיף (ג) של משפט 3.

(ב) $\Leftarrow$ (ג): מיידי מסעיף (א) של משפט 3.

(ג) $\Leftarrow$ (א): נניח ש- G הוא חסר מעגלים מקסימלי. כדי להוכיח, ש- G הינו עץ, עלינו להראות, שכל שני קדקודים v ו- w של G הינם קשורים. ברור, שזהו המצב כאשר יש קשת ב- E בין v ל- w. נניח אפוא, שאין ב- E קשת כזו. ניצור גרף חדש, G', על V על-ידי שנוסיף ל- E קשת חדשה, e^*, בין v ל- w. מתכונת המקסימליות של G נובע, ש- G' מכיל מעגל. הקשת e^* חייבת להימצא על מעגל זה (כי אחרת היה מדובר במעגל ב- G, אך G חסר מעגלים!). מכאן שיש ב- G' מסלול מעגלי מהצורה:

$$<v, e^*, w, e_1, \ldots, e_n, v>$$

כאשר $e_1, \ldots, e_n$ הן קשתות ב- E. עתה, $<w, e_1, \ldots, e_n, v>$ הינו מסלול ב- G בין w ל- v, ולכן v ו- w אכן קשורים ב- G.

עבור האפיון הבא של עצים נזדקק ללמה:

למה 1:

יהי $G = <V, E, F>$ גרף קשיר, ונניח ש- $e \in E$ היא קשת המונחת על איזשהו מעגל ב- G. אז $G' = <V, E - \{e\}, F/(E - \{e\})>$ הינו גרף קשיר (ובניסוח פחות מדויק: הסרת קשת ממעגל בגרף קשיר אינה פוגעת בקשירות).

הוכחה:

נניח שהקצוות של e הם a ו- b. כיוון ש- e נמצאת על מעגל ב- G, קיים ב- G מסלול מעגלי מהצורה: $<a, e, b, e_1, \ldots, e_k, a>$, כאשר $e_1, \ldots, e_k \in E - \{e\}$. מכאן ש- $p = <b, e_1, \ldots, e_k, a>$ הוא מסלול ב- G' בין b ל- a.

[2] ניסוח מדויק יותר: G חסר מעגלים, אך בכל גרף מהצורה $<V, E', F'>$, כך ש- $E \subset E'$, יש מעגלים.

יהיו עתה $v_1, v_2 \in V$. נראה שהם קשורים ב- G'. כיוון ש- G קשיר, הרי יש ב- G מסלול q בין v_1 ל- v_2. אם e אינה נמצאת על מסלול זה, אז q עצמו הינו מסלול ב- G' בין v_1 ל- v_2. אם e כן נמצאת על q, אז אחד מהקטעים $<a, e, b>$ או $<b, e, a>$ הוא קטע של q. במקרה הראשון נחליף ב- q קטע זה עם p. במקרה השני נחליף אותו בהיפוכו של p. בשני המקרים נקבל כך מ- q מסלול חדש בין v_1 ל- v_2, שנמצא כולו ב- G'.

מסקנה 4:

התנאים הבאים שקולים עבור גרף $G = <V, E, F>$:

(א) G עץ.

(ב) G קשיר ו- $|E| = |V| - 1$.

(ג) G קשיר מינימלי, דהיינו: G קשיר, אך אם נסלק קשת כלשהי מ- E, נקבל גרף, שאינו קשיר.

הוכחה:

(א) $\Leftarrow$ (ב): מיידי מהגדרת עץ וסעיף (ג) של משפט 3.

(ב) $\Leftarrow$ (ג): מיידי מסעיף (ב) של משפט 3.

(ג) $\Leftarrow$ (א): נניח ש- G קשיר מינימלי. כדי להראות ש- G הינו עץ, יש להוכיח רק, שב- G אין מעגלים. זה נובע מלמה 1, כיוון שלו היה ב- G מעגל, היינו יכולים, לפי למה זו, להסיר מ- G את אחת הקשתות של מעגל זה, ולקבל כך גרף קשיר. זה סותר את תכונת המינימליות של G.

ללמה 1 יש מסקנה חשובה נוספת. כדי לנסח אותה, עלינו להכניס מושג חדש:

הגדרה 3:

(א) תת-גרף G' של גרף G *פורש* את G, אם ל- G ול- G' יש אותם קדקודים.

(ב) *עץ פורש* של גרף G הוא תת-גרף של G, הפורש את G ומהווה עץ.

משפט 4:

לגרף $G = <V, E, F>$ יש עץ פורש אם"ם הוא קשיר.

הוכחה:

ברור שאם ל- G יש תת-גרף קשיר, אז G עצמו קשיר. לכן אם ל- G יש עץ פורש, אז G קשיר.

לכיוון ההפוך נוכיח באינדוקציה על $|E|$, שאם G קשיר, אז יש לו עץ פורש.

אם $|E| = 0$, אז כיוון ש- G קשיר, $|V| = 1$. לכן, במקרה זה G עצמו הוא עץ, וממילא הוא עץ פורש עבור עצמו.

נניח את נכונות הטענה כאשר $|E| = n$, ונניח $|E| = n + 1$. אם אין ב- G מעגלים, אז G הוא עץ, והוא פורש את עצמו. אחרת יש ב- G מעגל, ולכן, לפי למה 1, נוכל להסיר מ- G את אחת הקשתות של מעגל זה ולקבל גרף קשיר G' עם n קשתות. לפי הנחת האינדוקציה יש ל- G' עץ פורש T. כיוון של- G ול- G' יש אותם קדקודים, T הוא גם עץ פורש של G (שימו לב, שאנו מסתמכים כאן על העובדה הברורה, שאם T הינו תת-גרף של G', ו- G' הוא תת-גרף של G, אז T הוא תת-גרף גם של G).

הערה:

ההוכחה מקפלת למעשה בחובה אלגוריתם למציאת עץ פורש עבור גרף נתון G על-ידי סילוק חוזר של קשתות, עד שנשארים עם עץ פורש.

נחזור עתה לנושא של אפיוני עצים. תחילה למה חשובה נוספת:

למה 2:

אם קיימים בגרף G שני קדקודים (לא בהכרח שונים), שיש ביניהם שני מסלולים שונים, אז יש ב- G מעגל.

הוכחה:

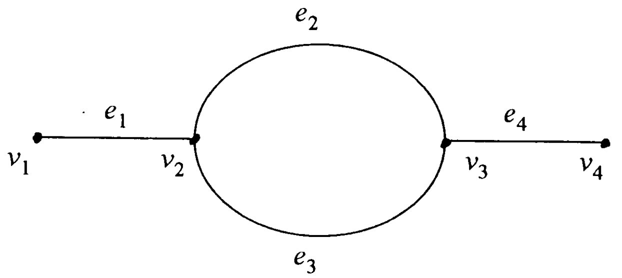
נניח, שיש ב- G שני מסלולים שונים עם אותם קדקודי התחלה וסוף. נבחר שני מסלולים p ו- p' כאלה, שסכום אורכיהם הוא מינימלי. ל- p ול- p' יש אפוא הצורה הבאה:

$$p = <x, e_1, z_1, \ldots, z_n, e_n, y> \quad , \quad p' = <x, e'_1, z'_1, \ldots, z'_k, e'_k, y>$$

נסמן ב- q את תת-המסלול של p בין z_1 ל- y, וב- q' את תת-המסלול של p' בין z'_1 ל- y. כיוון ש- $p \neq p'$, גם $e_1 \neq e'_1$, כי אחרת היינו מקבלים ש- $z_1 = z'_1$, ולכן q ו- q' היו אז שני מסלולים שונים עם אותם קדקודי התחלה וסוף, שסכום אורכיהם קטן מזה של p ו- p' (בסתירה לבחירת p ו- p'). עתה, אם x מופיע על q או על q', אז p או p' מכיל מעגל, וסיימנו. נניח אפוא שלא. אז e_1 ו- e'_1 גם הן אינן נמצאות על q או על q'. לכן החיבור של q עם היפוכו של q' מהווה טיול בין z_1 ל- z'_1, שאינו מכיל את e_1 או את e'_1. מטיול זה ניתן להוציא מסלול r בין z_1 ל- z'_1, שאף הוא אינו מכיל כמובן את e_1 או את e'_1 (השווה להוכחת טענה 1 של הפרק הקודם). מכאן, שחיבורם של $<x, e_1, z_1>$, r ו- $<z'_1, e'_1, x>$ נותן מעגל (מהצורה: $<x, e_1, z_1, \ldots, z'_1, e'_1, x>$).

הערה:

יש לשים לב, שקיומם של שני מסלולים שונים בין שני קדקודים ***אין*** פירושו, ששני קדקודים אלו, או אפילו רק אחד מהם, חייבים להיות מונחים על מעגל. כך למשל, יש שני מסלולים שונים בין הקדקודים v_1 ו- v_4 בגרף של ציור 5, אך גם v_1 וגם v_4 אינם נמצאים על שום מעגל בגרף זה.



ציור 5

מסקנה 5:

גרף G הינו עץ אם"ם בין כל שני קדקודים שלו יש מסלול (פשוט) יחיד.

הוכחה:

נניח ש- G הינו עץ. אז G קשיר, ולכן יש מסלול בין כל שני קדקודים שלו. מסלול זה הוא יחיד לפי למה 2, כיוון ש- G הוא חסר מעגלים (והוא גם פשוט מאותה סיבה בדיוק!).

לכיוון ההפוך, נניח כי בין כל שני קדקודים של G יש מסלול יחיד. אז G הוא בוודאי קשיר. כמו-כן, לא ייתכנו ב- G מעגלים, כי כל שני קדקודים על מעגל קשורים זה לזה בשני מסלולים שונים.[3]

המשפט הבא מסכם את כל האפיונים, שמצאנו עבור מושג ה"עץ":

משפט 5:

התנאים הבאים לגבי גרף $G = <V, E, F>$ הם שקולים:

(א) G עץ.

(ב) G קשיר, ובכל תת-גרף שלו יש קדקוד, שדרגתו 0 או 1.

(ג) G קשיר, ו- $|E| = |V| - 1$.

(ד) G קשיר מינימלי.

---

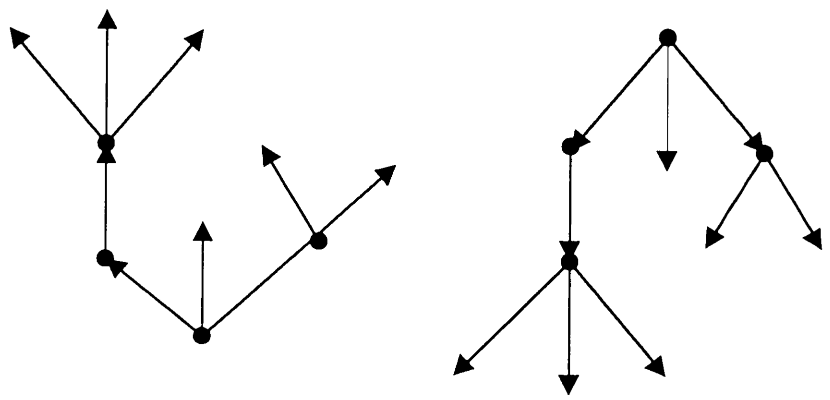
[3] כדאי לשים לב שזה נכון גם כאשר שני הקדקודים הם זהים: כל קדקוד v על מעגל p קשור לעצמו בשני מסלולים שונים: p עצמו, והמסלול הטריביאלי $<v>$.

(ה) בין כל שני קדקודים של G יש מסלול (פשוט) יחיד.

(ו) G חסר מעגלים, ו- $|G| = |V| - 1$.

(ז) G חסר מעגלים מקסימלי.

מצאנו עד כה אפיונים שונים ומשונים למושג ה"עץ", אבל אף אחד מהם לא מבהיר, בעצם, למה קוראים אנו לגרף (לא-מכוון) קשיר וחסר מעגלים בשם "עץ". אינטואיטיבית, עץ אמור דווקא להיות גרף מכוון, שיש לו "שורש", והוא מתפצל ל"ענפים". זהו אכן מושג העץ, כפי שהוא מופיע במרבית השימושים במדעי המחשב. דוגמה לגרף כזה ניתן למצוא בציור 6:[4]



ציור 6

מטרתנו הבאה תהיה להגדיר מושג אינטואיטיבי זה של עץ באופן מדויק, ולהבהיר את הקשר בינו ובין מושג העץ, כפי שהגדרנו למעלה.

הגדרה 4:

(א) ***עץ מכוון*** הוא גרף מכוון G, שיש בו קדקוד a, הקשור לכל קדקוד של הגרף על-ידי מסלול יחיד. לקדקוד a קוראים ***השורש*** של G.

(ב) אם G הינו עץ מכוון ו- v_1, v_2 הם קדקודים שלו, אז v_1 נקרא ***הורה*** של v_2, ו- v_2 ***ילד*** של v_1, אם יש קשת ב- G מ- v_1 אל v_2. v_1 נקרא ***אב קדמון*** של v_2, ו- v_2 ***צאצא*** של v_1, אם יש מסלול ב- G בין v_1 ל- v_2, שאורכו גדול מאפס.

(ג) קדקוד ללא ילדים בעץ מכוון נקרא ***עלה*** של אותו עץ.

[4] בשני חלקי הציור מתואר אותו גרף מכוון עצמו, כשפעם הוא מצויר כשכיוון הסתעפותו כלפי מעלה, ופעם – כלפי מטה. מתמטית אין לכך כל חשיבות כמובן (במדעי המחשב, אגב, מרבית העצים "גדלים" כלפי מטה, משום מה).

למה 3:

יהי G עץ מכוון עם שורש a, ויהיו v ו-w קדקודים שלו. נניח ש- p_1 הוא המסלול היחיד מ- a ל- v, ונניח ש- p_2 הוא מסלול מ- v ל- w. אז חיבורם של p_1 ו- p_2 הוא מסלול מ- a ל- w.

הוכחה:

החיבור של p_1 ו- p_2 הוא כמובן טיול מ- a ל- w. כדי להראות, שהוא גם מסלול, די להוכיח, של- p_1 ול- p_2 אין שום קשת משותפת. נניח בשלילה, שיש להם קשת כזו. תהי e הקשת הראשונה של p_2, הנמצאת גם על p_1. יהי u קדקוד היציאה של e. נסמן ב- p'_2 את קטע המסלול של p_2 עד e (לא כולל e). p'_2 הוא מסלול מ- v ל- u, שאין לו שום קשת משותפת עם p_1. לכן החיבור של p_1 ו- p'_2 הוא מסלול מ- a ל- u. אורך מסלול זה הינו גדול או שווה לזה של p_1. מצד שני, הקטע של p_1 עד e (לא כולל e) הוא מסלול מ- a ל- u, שאורכו קטן מזה של p_1. קיבלנו שני מסלולים שונים מהשורש a לקדקוד u, בסתירה להגדרת עץ מכוון.

משפט 6:

נניח ש- G הינו עץ מכוון עם שורש a. אזי:

(א) $d_G^+(a) = 0$

(ב) $d_G^+(x) = 1$ לכל x השונה מ- a.

הוכחה:

(א) נניח בשלילה, שיש קשת e הנכנסת ל- a. נניח שקשת זו מתחילה בקדקוד w. כיוון ש- a שורש של העץ, יש מסלול בעץ מ- a ל- w. אם נחבר למסלול זה את $\langle w, e, a\rangle$, נקבל, לפי למה 3, מסלול לא טריביאלי מ- a ל- a. בין a ל- a קיים אבל גם המסלול הטריביאלי $\langle a\rangle$. מכאן שבין a לעצמו יש שני מסלולים שונים, בסתירה לכך, שבין a לכל קדקוד של העץ יש, לפי הגדרה, מסלול יחיד.

(ב) נניח ש- x הוא קדקוד השונה מ- a. אז קיים מסלול בין a ל- x. מסלול זה אינו טריביאלי (כי $x \neq a$) ולכן הוא חייב להסתיים בקשת, הנכנסת ל- x. מכאן ש- $d_G^+(x) \geq 1$. נניח בשלילה, ש- $d_G^+(x) > 1$. מכאן שיש שתי קשתות שונות, e_1 ו- e_2, הנכנסות ל- x. נניח שקשתות אלו יוצאות מהקדקודים v_1 ו- v_2 (בהתאמה). כיוון ש- a הוא שורש, יש מסלולים p_1 ו- p_2 (בהתאמה) מ- a אל v_1 ואל v_2. על-ידי חיבור p_1 ל- $\langle v_1, e_1, x\rangle$ וחיבור p_2 עם $\langle v_2, e_2, x\rangle$ נקבל לפי למה 3 שני מסלולים שונים מ- a ל- x (הם שונים, כי $e_1 \neq e_2$). זוהי סתירה לכך, שמ- a יש מסלול יחיד אל x. לכן לא ייתכן, ש- $d_G^+(x) > 1$, ומכאן ש- $d_G^+(x) = 1$.

מסקנה 6:

לכל עץ מכוון יש רק שורש אחד.

הוכחה:

ממשפט 6 נובע מצד אחד, שלכל שורש יש דרגת כניסה 0, ומצד שני שיש רק קדקוד אחד עם דרגת כניסה כזו.

הערה:

למעשה רק עכשיו, במסקנה 6, הצדקנו את השימוש בה"א הידוע בהגדרת "השורש של עץ מכוון" למעלה (הגדרה (4)(א)).

מסקנה 7:

אם $G = <V, E, F>$ הוא עץ מכוון, אז $|E| = |V| - 1$.

הוכחה:

זה מיידי ממשפט 6, ומהעובדה ש- $|E| = \sum_{x \in V} d_G^+(x)$ (טענה 4 בפרק הקודם).

למה 4:

(א) בין כל שני קדקודים של עץ מכוון יש לכל היותר מסלול אחד.

(ב) בעץ מכוון אין מעגלים.

הוכחה:

(א) נניח שבין הקדקודים v ו- w יש שני מסלולים שונים. חיבורם של מסלולים אלו אל המסלול, שקיים בין השורש a ל- v, ייתן, לפי למה 3, שני מסלולים שונים בין a ל- w, בסתירה להגדרת השורש.

(ב) כל מעגל מספק מסלול לא טריביאלי בין כל קדקוד v עליו אל עצמו. כיוון שתמיד קיים גם המסלול הטריביאלי $<v>$, חלק (ב) הוא מקרה פרטי של חלק (א).

משפט 6, מסקנותיו ולמה 4 מספקים יחד תמונה טובה של המבנה של עץ מכוון: בכל עץ כזה שום קדקוד אינו אב קדמון של עצמו. השורש הוא אב קדמון של כל הקדקודים האחרים. לשורש אין הורה, ולכל קדקוד אחר יש הורה יחיד. בין הורה לכל אחד מילדיו אין מסלול אחר, פרט לקשת המחברת אותם. בין כל קדקוד לבין צאצא שלו יש מסלול יחיד. האבות הקדמונים של כל קדקוד v הם הקדקודים הנמצאים על המסלול היחיד מהשורש ל- v. ענף בעץ הוא מסלול, המתחיל בשורש ונגמר באיזה עלה, וכל מסלול

חלקי לאיזשהו ענף. אם v_1 ו- v_2 הם שניהם אבות קדמונים שונים של קדקוד w, אז אחד מהם הינו אב קדמון של השני.

נשאיר לקוראים לבדוק, שכל הטענות הללו על מבנה עץ מכוון נובעים אכן בקלות ממה שכבר הוכחנו, ונעבור עתה לקשרים בין עצים מכוונים ועצים (לא מכוונים).

משפט 7:

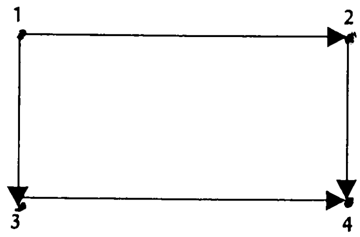
אם G' הינו עץ מכוון, אז הגרף (הלא מכוון), ש- G' מבוסס עליו, הוא עץ (לא מכוון).

הוכחה:

נניח ש- G' מבוסס על G. כיוון שכל מסלול ב- G' הוא גם מסלול של G [5], השורש של G' קשור ב- G לכל קדקוד אחר. מזה נובע, בגלל הסימטריות והטרנזיטיביות של יחס הקשירות, שכל קדקוד של G קשור לכל קדקוד אחר. דהיינו: G קשיר. מזה, מסעיף (ג) של משפט 5 וממסקנה 7 נובע, ש- G הינו עץ.

אזהרה:

הסתמכות על למה 4 על מנת לטעון ישירות, ש- G הוא חסר מעגלים, לא היתה מספיקה כאן: מהעובדה, שבגרף מכוון מסוים G' אין מעגלים, ***לא*** נובע בהכרח, שגם בגרף הלא מכוון, ש- G' מבוסס עליו, אין מעגלים. כך למשל, אין מעגלים בגרף המכוון של ציור 7, אך הגרף הלא מכוון, ש- G' מבוסס עליו, הינו מעגל.



ציור 7

המשפט הבא הולך בכיוון ההפוך מזה של משפט 7. הוא מראה, כיצד ניתן להפוך כל עץ לא-מכוון לעץ מכוון, על-ידי שבוחרים, איזה קדקוד יהווה את השורש.

משפט 8:

יהי $G = \langle V, E, F\rangle$ עץ (לא מכוון), ויהי $a \in V$. אז קיים עץ מכוון יחיד G' המבוסס על G, כך שהקדקוד a הוא השורש שלו.

---

[5] ההיפך, נזכור, אינו נכון.

כדי להוכיח את משפט 8, נזדקק לשתי הלמות הבאות:

למה 5:

יהי $G = <V, E, F>$ עץ (לא מכוון), ויהיו $a \in V$, $e \in E$. נניח ש- e מחברת את הקדקודים v_1 ו- v_2, ויהיו p_1 ו- p_2 המסלולים היחידים המחברים את a ל- v_1 ול- v_2 (בהתאמה)[6]. אז או ש- e הינה הקשת האחרונה ב- p_1 ואינה נמצאת על p_2, או ש- e הינה הקשת האחרונה ב- p_2 ואינה נמצאת על p_1.

הוכחת למה 5:

אם e נמצאת על p_1, אז כיוון שלפי מסקנה 5 p_1 הינו פשוט, ל- p_1 יש הצורה $<a, \ldots, v_2, e, v_1>$, ו- e הינה אפוא הקשת האחרונה ב- p_1. כמו-כן, הקטע של p_1 בין a ל- v_2 הוא מסלול בין a ל- v_2, ולכן שווה ל- p_2. מכאן ש- e אינה נמצאת על p_2 במקרה זה.

אם e אינה נמצאת על p_1, אז נוכל לחבר את $<v_1, e, v_2>$ ל- p_1 ולקבל כך מסלול בין a ל- v_2, דהיינו: את p_2. מכאן, שבמקרה זה e הינה הקשת האחרונה ב- p_2.

למה 6:

יהי $G = <V, E, F>$ עץ, $a \in V$, ויהי G' עץ מכוון המבוסס על G, ש- a הינו השורש שלו. נניח ש- e היא קשת ב- G המחברת את הקדקודים v ו- w, וש- e נמצאת בסופו של המסלול היחיד ב- G מ- a ל- w. אז e מחברת ב- G' את v ל- w (ולא להיפך).

הוכחת למה 6:

יהי p המסלול היחיד ב- G' מ- a ל- w. p הינו גם מסלול (יחיד בהכרח) ב- G בין a ל- w [7], ולכן e נמצאת בסופו של p. מכאן של- p הצורה: $<a, \ldots, v, e, w>$. כיוון ש- p מסלול של G', הכיוון של e ב- G' חייב להיות מ- v אל w.

הוכחת משפט 8:

יחידות: נניח ש- $G_1 = <V, E, F_1>$ ו- $G_2 = <V, E, F_2>$ הם שני עצים מכוונים המבוססים על G, ונניח ש- $a \in V$ הוא השורש של שניהם. יהי $e \in E$, ונניח ש- e מחברת ב- G את v_1 ו- v_2 (כלומר: $F(e) = \{v_1, v_2\}$). יהיו p_1 ו- p_2 המסלולים היחידים ב- G בין a ל- v_1 ו- v_2 (בהתאמה). לפי למה 6, אם e היא הקשת האחרונה ב- p_1, אז הכיוון שלה גם ב- G_1 וגם ב- G_2 הוא מ- v_2 אל v_1 (כלומר: $F_1(e) = F_2(e) = <v_2, v_1>$), בעוד שאם e היא הקשת האחרונה ב- p_2, אז הכיוון שלה גם ב- G_1 וגם ב- G_2 הוא

---

[6] ראה סעיף (ה) של משפט 5 או מסקנה 5.

[7] ראה הערה (6) אחרי הגדרת "טיול" בפרק הקודם. ההערה נכונה כמובן גם למסלולים.

מ- v_1 אל v_2 (כלומר: $F_1(e) = F_2(e) = <v_1, v_2>$). לאור למה 5, פירוש הדבר, שבכל מקרה $F_1(e) = F_2(e)$. זה נכון לכל $e \in E$, ולכן $F_1 = F_2$, וממילא $G_1 = G_2$.

קיום: נגדיר גרף מכוון $G' = <V, E, F'>$, המבוסס על G, באופן הבא: אם $e \in E$, ו- $F(e) = \{v_1, v_2\}$, אז $F'(e) = <v_1, v_2>$, אם e היא הקשת האחרונה על p_2, ו- $F'(e) = <v_2, v_1>$, אם e היא הקשת האחרונה על p_1 (כאשר p_1 ו- p_2 מוגדרים כמו בלמה 5). F' מוגדר היטב לאור למה 5. נראה, ש- G' הוא עץ מכוון עם הקדקוד a כשורש, דהיינו: לכל $v \in V$ יש ב- G' מסלול יחיד בין a ל- v. עתה כל מסלול ב- G' הוא גם מסלול ב- G, ולכל $v \in V$ יש ב- G בדיוק מסלול אחד בין a ל- v. לכן מספיק להוכיח, שכל מסלול p ב- G המתחיל ב- a, הוא גם מסלול ב- G'. נראה זאת באינדוקציה על n – אורך המסלול p.

אם $n = 0$, אז $p = <a>$, וזהו כמובן מסלול גם ב- G'.

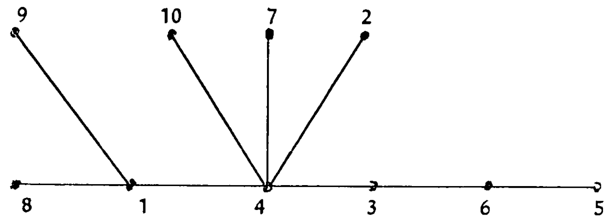
נניח את נכונות הטענה לגבי מסלולים באורך n, ויהי p מסלול ב- G, שאורכו $n + 1$. נניח $p = <a, e_1, \ldots, e_n, v_n, e_{n+1}, v_{n+1}>$. אז $<a, e_1, \ldots, e_n, v_n>$ מסלול באורך n, המתחיל ב- a. לכן, לפי הנחת האינדוקציה, זה גם מסלול ב- G'. כיוון ש- p הינו מסלול ב- G המתחיל ב- a, נובע מהגדרת G', ש- $F(e_{n+1}) = <v_n, v_{n+1}>$. משתי עובדות אלו נובע, ש- p הוא אכן מסלול גם ב- G'.

הערה:

נשים לב, שהדרך, בה הוכחנו את היחידות במשפט הקודם, כפתה למעשה את הגדרת G', כפי שניתנה בהוכחת חלק הקיום של משפט זה.

דוגמה:

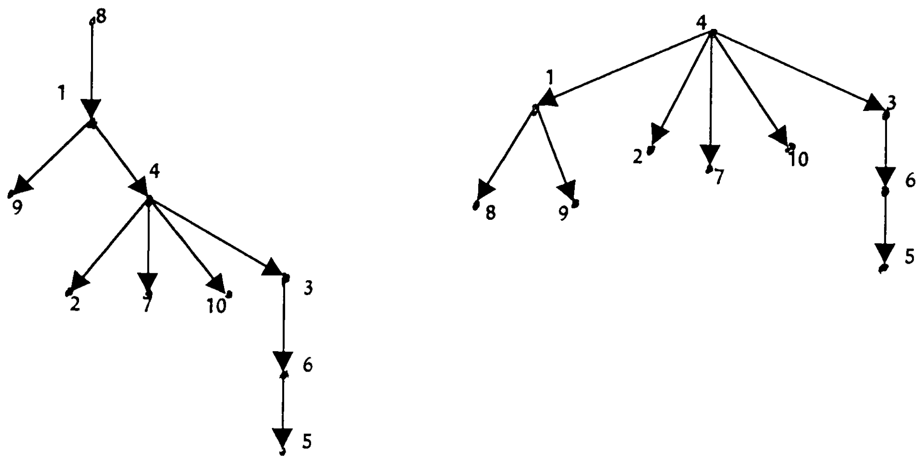
יהי $G = <V, E>$ העץ[8] המתואר בציור 8:



ציור 8

[8] כיוון שבעצים אין לולאות ואין קשתות מקבילות, אפשר בדרך-כלל להתייחס לעץ כאל זוג $<V, E>$, וכך אכן מקובל לעשות. ראו דיון בפרק ה.1.

בחירת 4 כשורש תיתן את העץ המכוון, המתואר בצד ימין של ציור 9, בעוד בחירת 8 כשורש תיתן את העץ המכוון, המתואר בצד שמאל של ציור זה.



ציור 9

תרגיל:

מה הקשר בין העלים של עץ (לא מכוון) והעלים של עץ מכוון המבוסס עליו? (ראה הגדרות (2)(ב) ו- (4)(ג)).

התרגיל הבא נותן אפיון מסוג אחר למושג של "עץ".

תרגיל:

(א) יהי $T = <V, E, F>$ עץ מכוון. נגדיר יחס $\leq_T$ על V באופן הבא: $v \leq_T w$ אם"ם $v = w$, או w הינו צאצא של v.

הראה שליחס $\leq_T$ התכונות הבאות:

(1) $\leq_T$ הוא יחס סדר חלקי.

(2) קיים ב- V איבר קטן ביותר לפי $\leq_T$, דהיינו איבר a, כך ש- $\forall x \in V.\ a \leq_T x$.

(3) לכל $v \in V$ הקבוצה $\{x \in V \mid x \leq_T v\}$ סדורה מלא על-ידי $\leq_T$.

(ב) נניח ש- V קבוצה סופית לא ריקה, ו- $\leq$ יחס על V, המקיים את תכונות (1)-(3) מחלק (א). נגדיר גרף מכוון $<V, E>$ על V, על-ידי שניצור קשת בין קדקוד v לקדקוד w אם"ם w הינו עוקב של v לפי $\leq$ (דהיינו: $v \leq w$, $w \neq v$, ואם $v \leq x \leq w$, אז $x = v$ או $x = w$). הראה ש- $T = <V, E>$ הוא עץ מכוון, ו- $\leq_T = \leq$.

ה.4 נוסחת קיילי

הפרקים הקודמים הוקדשו להכרת המושגים היסודיים של תורת הגרפים. לא היה בהם למעשה יותר מאשר מבוא מתמטי מדויק לתורה עשירה זו. כדי לתת לקורא רמז כלשהו לעושר זה, נקדיש פרק זה למשפט לא טריביאלי אחד של תורת הגרפים. את השאר נשאיר לקורסים מתקדמים יותר.

השאלה המרכזית, שנעסוק בה בפרק זה, הינה: בהינתן קבוצה סופית V עם שני איברים לפחות, כמה עצים מהצורה $<V, E>$ (כש- $E \subseteq V^2$) קיימים? במלים אחרות: בכמה אופנים ניתן להפוך קבוצה סופית נתונה לעץ? התשובה ניתנת במשפט הבא:

נוסחת קיילי:

תהי V קבוצה סופית כך ש- $|V| \geq 2$. אז מספר העצים מהצורה $<V, E>$ הוא $|V|^{|V|-2}$.

ובסימונים:

$$|V| \geq 2 \;\Rightarrow\; |T(V)| = |V|^{|V|-2}$$

כאשר:

$$T(V) = \{E \in P(P_2(V)) \mid \text{הינו עץ } <V, E>\}$$

כצעד ראשון בהוכחת משפט זה נציין, שדי להוכיח אותו עבור המקרה בו V הינה קבוצה סופית של מספרים טבעיים. זה מתבסס על התרגיל הפשוט הבא, שאת הוכחתו אנו משאירים לקורא:

תרגיל:

אם $|V_1| = |V_2|$, אז $|T(V_1)| = |T(V_2)|$.

המשפט שנוכיח הוא לכן:

משפט קיילי:

$$\forall V \in P_{\text{fin}}(\mathbf{N}).\; |V| \geq 2 \;\Rightarrow\; |T(V)| = |V|^{|V|-2}$$

הדרך הטבעית ביותר להוכחת נוסחה כמו נוסחת קיילי, היא למצוא קבוצה S הקשורה ב- V, עליה ידוע כבר ש- $|S| = |V|^{|V|-2}$, ולהראות ש- S ו- $T(V)$ הינן שוות-עוצמה. החלק הראשון בתכנית זו הינו קל לביצוע. מהעקרונות הבסיסיים, שלמדנו בפרקים קודמים, אנו יודעים, ש- $|V|^{|V|-2}$ היא העוצמה של $V^{|V|-2}$ (דהיינו: עוצמת קבוצת הרשימות מאורך $|V|-2$ של איברי V, שזה מספר "האפשרויות לבחור $|V|-2$ עצמים מתוך V עם חזרות ועם חשיבות לסדר"). אשר לחלק השני – הוא קשה יותר. העקרונות הקומבינטוריים שלמדנו אינם מסייעים כאן. אנו נאלץ לכן לנקוט בדרך הישירה: בניית פונקציית שקילות בין $T(V)$ ל- $V^{|V|-2}$. מה שאנו מחפשים, אם כך, היא דרך להתאים לכל $E \in T(V)$ רשימה באורך $|V|-2$ של איברי V, כך שההתאמה תגדיר פונקציה הפיכה. מעשית, אנו מחפשים אפוא שיטה, כיצד ***לקודד*** כל $E \in T(V)$ על-ידי רשימה כנ"ל, כך שנוכל לשחזר כל E כזה מהקוד עבורו. הקוד עבור E צריך לכן לכלול בתוכו את כל האינפורמציה הדרושה לשם כך. זה מציג בעיה מסוימת: מתוך התבוננות ברשימה באורך $|V|-2$ של איברי V ובה בלבד, לא נוכל לדעת אפילו מי הם כל איברי V: יהיו לפחות שניים, שאותם לא תהיה לנו כל דרך לנחש. כדי להתגבר על בעיה זו יצטרך תהליך השחזור לקבל ***שני*** נתונים: קבוצת הקדקודים V והקוד s של E (זוג כזה יהיה תקין, אם כל מספר המופיע ברשימה s שייך לקבוצה V).

הבה נסכם. מטרתנו היא, בהינתן קבוצה סופית V של מספרים טבעיים, למצוא פונקציות $H_V : V^{|V|-2} \to T(V)$ ו- $F_V : T(V) \to V^{|V|-2}$, שתהיינה הפוכות זו לזו. את זאת נשיג על-ידי שנבנה פונקציות כלליות F ו-H, כך ש- F מספקת ***לכל*** V כנ"ל ולכל E, כך ש- $E \in T(V)$, קוד מתאים ב- $V^{|V|-2}$, בעוד H מתאימה לכל V ו- s, כך ש- $s \in V^{|V|-2}$, קבוצה E, כך ש- $<V, E>$ עץ. הפעלת פונקציית קורי Cu על F תיתן פונקציה, שלכל V תספק F_V מתאים, בעוד הפעלת Cu על H תיתן פונקציה, שלכל V תספק H_V מתאים.

נתחיל בקביעת התחומים של F ו- H. לשם כך נשתמש בסימונים הבאים:

$$\mathbf{E} = P_{\text{fin}}(P_2(\mathbf{N}))$$

E היא קבוצת כל הקבוצות הסופיות של קשתות, שקדקודיהן ב- **N**.

$$\mathbf{T} = \{<V, E> \in P_{\text{fin}}(\mathbf{N}) \times \mathbf{E} \mid |V| \geq 2 \wedge E \in T(V)\}$$

T היא קבוצת כל העצים הלא-טריביאליים הסופיים, שקדקודיהם שייכים ל- **N**.

$$\mathbf{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{N}^n$$

S היא קבוצת כל הרשימות הסופיות של מספרים טבעיים (כאן $\mathbf{N}^0 = \{\varnothing\}$).

$$\mathbf{B} = \{<V, s> \in P_{\text{fin}}(\mathbf{N}) \times \mathbf{S} \mid |V| \geq 2 \wedge s \in V^{|V|-2}\}$$

B הינה קבוצת כל הקודים המלאים של איברי **T**.

אנו עומדים אפוא להגדיר פונקציות $F: \mathbf{T} \to \mathbf{S}$ ו- $H: \mathbf{B} \to \mathbf{E}$. ההגדרה של F ו- H תהיה ***רקורסיבית*** במובן הבא: בעוד הערך של F (למשל) עבור העצים הלא-טריביאליים הפשוטים ביותר יינתן ישירות, הרי כדי לחשב את $F(V, E)$ עבור עץ מורכב יותר נצטרך לחשב תחילה את ערך F עבור עץ עם מספר קשתות קטן יותר. העיקרון פה הוא אותו עיקרון שהפעלנו, בעת שהגדרנו פונקציות בעזרת נוסחאות נסיגה. רעיון ההגדרה ברקורסיה הוא אכן רעיון כללי, שמשתמשים בו רבות בתכנות (ובמיוחד בשפות תכנות פונקציונליות, דוגמת SCHEME).

לצורך ההגדרה המדויקת של F ו- H, נשתמש במספר סימונים מקובלים, הקשורים בטיפול ברשימות: אם $s = <a_1, \ldots, a_n>$ היא רשימה לא ריקה, אז $\text{hd}(s)$ יסמן את a_1 ("ראש" הרשימה s), בעוד $\text{tail}(s)$ יסמן את שאר הרשימה, דהיינו: הרשימה $<a_2, \ldots, a_n>$ (רשימה זו היא ריקה כאשר $n = 1$). כמו-כן, אם $k \in \mathbf{N}$, אז $k\hat{\ }s$ יסמן את הרשימה $<k, a_1, \ldots, a_n>$.[1,2]

הגדרה 1:

הפונקציה $F: \mathbf{T} \to \mathbf{S}$ מוגדרת באופן הבא:

$$F(V, E) = \begin{cases} \varnothing & |E| = 1 \\ n_1\hat{\ } F(V - \{n_0\}, E - \{a\}) & |E| > 1 \end{cases}$$

כאשר: n_0 הוא האיבר הקטן ביותר ב- V, שהוא עלה של $<V, E>$.
a היא הקשת ביחידה ב- E, ש- n_0 נמצא עליה.
n_1 הוא הקצה השני של a (זה השונה מ- n_0).

---

1 בשפת התכנות LISP כותבים CAR(s) במקום $\text{hd}(s)$, CDR(s) במקום $\text{tail}(s)$, ו- $\text{cons}(k, s)$ במקום $k\hat{\ }s$.

2 נשים לב, שאם $<a_1, \ldots, a_n>$ מוגדר (כמו בפרק ב.3) בתור $<a_1, <\ldots <a_{n-1}, a_n> \ldots>$, אז $\text{hd}(s) = \pi_1(s)$, $\text{tail}(s) = \pi_2(s)$ ו- $n\hat{\ }s = <n, s>$.

הגדרה רקורסיבית מסוג זה של F יש להצדיק, כלומר: עלינו להראות ש- $F(V, E)$ אכן מוגדר לכל $\mathbf{T} \in \langle V, E\rangle$, ו- $F(V, E)$ אכן איבר של $\mathbf{S}$. למעשה, נוכיח יותר:

למה 1:

הפונקציה F מוגדרת היטב לכל $\mathbf{T} \in \langle V, E\rangle$, ו- $s = F(V, E)$ היא רשימה באורך $|E| - 1$ (שזה $|V| - 2$, כי $\langle V, E\rangle$ עץ) של איברים של V, שאף אחד מהם אינו עלה של $\langle V, E\rangle$. יתר על כן: כל איבר של V, שאינו עלה, מופיע ברשימה s.

הוכחת למה 1:

באינדוקציה על $|E|$.

אם $|E| = 1$ אז $|V| = 2$, ושני קדקודי V הינם עלים. $F(V, E)$ הינו $\varnothing$, שהיא אכן רשימה ריקה באורך $|E| - 1 = 0$. מובן, שאף עלה אינו מופיע ברשימה זו, אך כל איבר של V, שאינו עלה, כן מופיע בה (פשוט משום שאין איבר כזה!).

נניח נכונות הטענה כאשר $|E| = n \geq 1$. נניח ש- $|E| = n + 1$. אז $|V| = n + 2 \geq 3$. כיוון ש- $\langle V, E\rangle$ הינו עץ, קבוצת העלים של עץ זה אינה ריקה. זוהי קבוצה של מספרים טבעיים, ולכן יש בה איבר קטן ביותר. מכאן, ש- n_0 קיים, ולכן גם a ו- n_1 קיימים. יתר על כן: n_1 אינו עלה, כי שני עלים בעץ יכולים להיות מחוברים על-ידי קשת רק אם מספר קדקודי העץ הוא 2 (הוכח/י!), ואילו $|V| \geq 3$. עתה כל קשת ב- $E - \{a\}$ מחברת שני קדקודים של $V - \{n_0\}$ (כי a הינה הקשת היחידה, ש- n_0 נמצא עליה). לכן $G' = \langle V - \{n_0\}, E - \{a\}\rangle$ הינו תת-גרף של $\langle V, E\rangle$. ברור ש- G' חסר מעגלים, כי $\langle V, E\rangle$ הינו חסר מעגלים. כמו-כן, $|E - \{a\}| = |V - \{n_0\}| - 1$ (כי $|E| = |V| - 1$). מכאן ש- G' הינו עץ (לפי משפט (5)(ו) בפרק הקודם). מספר הקשתות של עץ זה הוא $n = (n + 1) - 1$. ניתן לכן להפעיל לגביו את הנחת האינדוקציה, ולקבל ש- $F(V - \{n_0\}, E - \{a\})$ היא רשימה באורך $n - 1$ $(|E - \{a\}| - 1)$ של איברי $V - \{n_0\}$, שאף אחד מהם אינו עלה ב- G', וממילא אף אחד מהם אינו עלה של $\langle V, E\rangle$. כיוון שגם n_1 אינו עלה של $\langle V, E\rangle$, $F(V, E)$ הוא רשימה באורך n (דהיינו: $|E| - 1$) של איברים ב-V, שאף אחד מהם אינו עלה של $\langle V, E\rangle$. נראה עוד, שכל איברי V, שאינם עלים של $\langle V, E\rangle$ נמצאים ברשימה זו. יהי אפוא w איבר של V, שאינו עלה של $\langle V, E\rangle$. אז $w \neq n_0$. אם $w = n_1$, אז הוא מופיע ב- $F(V, E)$ (ואפילו בראש הרשימה). אם $w \neq n_1$, אז w לא נמצא על a. לכן דרגתו ב- $\langle V, E\rangle$ זהה לדרגתו ב- G'. מכאן ש- w גם אינו עלה של G', ולכן, לפי הנחת האינדוקציה, w נמצא על $F(V - \{n_0\}, E - \{a\})$, וממילא w נמצא גם על $F(V, E)$.

מסקנה 1:
לכל $<V, E> \in \mathbf{T}$, $F(V, E) \in V^{|V|-2}$, ו- $<V, F(V, E)> \in \mathbf{B}$.

דוגמה 1:
יהי $<V, E>$ העץ מציור 8 בפרק הקודם. אז $V = \{1, 2, \ldots, 10\}$. כדי לקבל את $F(V, E)$ עלינו למצוא את n_0. זהו האיבר הקטן ביותר בקבוצת העלים של $<V, E>$. קבוצה זו הינה $\{2, 5, 7, 8, 9, 10\}$. לכן $n_0 = 2$. מכאן ש- $a = \{2, 4\}$ ו- $n_1 = 4$. $F(V, E)$ היא לכן רשימה באורך 8, המתחילה ב- 4. כדי למצוא את שאר הרשימה עלינו למצוא את $F(V - \{2\}, E - \{\{2, 4\}\})$, דהיינו: את הקוד של העץ המתקבל מ- $<V, E>$ על-ידי מחיקת הקדקוד 2 והקשת, המחברת אותו אל הקדקוד 4. אם נמשיך את התהליך נקבל ש:

$$F(V, E) = <4, 6, 3, 4, 4, 1, 1, 4>$$

הקדקודים המופיעים ב- $F(V, E)$ הם 1, 3, 4, 6. אלה הינם אכן הקדקודים של V, שאינם עלים של $<V, E>$.

הגדרה 2:
הפונקציה $H : \mathbf{B} \to \mathbf{E}$ מוגדרת ברקורסיה כך:

$$H(V, s) = \begin{cases} \{V\} & s = \varnothing \\ \{\{k_0, \mathrm{hd}(s)\}\} \cup H(V - \{k_0\}, \mathrm{tail}(s)) & s \neq \varnothing \end{cases}$$

כאשר k_0 הוא האיבר הקטן ביותר של V, שאינו מופיע ב- s.

למה 2:
הפונקציה H מוגדרת היטב לכל $<V, s> \in \mathbf{E}$, ו- $H(V, s) \in T(V)$. יתר על כן: $<V, H(V, s)>$ הינו עץ, שהעלים שלו הם בדיוק אותם איברים של V, שאינם מופיעים ברשימה s (בפרט: $<V, H(V, s)> \in \mathbf{T}$).

הוכחת למה 2:

באינדוקציה על $\ell(s)$ – אורך הרשימה s.

אם $\ell(s) = 0$ אז $s = \varnothing$. כיוון ש- $<V, s> \in B$, פירוש הדבר ש- $|V| = 2$. נניח למשל, ש- $V = \{n_1, n_2\}$. אז $<V, H(V, s)> = <\{n_1, n_2\}, \{\{n_1, n_2\}\}>$, וזהו עץ עם שני קדקודים וקשת אחת $(\{n_1, n_2\})$, המחברת אותם. שני הקדקודים הם עלים במקרה זה, ולכן הטענה מתקיימת בו.

נניח נכונות הטענה כאשר $\ell(s) = n$, ונניח $\ell(s) = n + 1$. אז $|V| = n + 3 > 2$. עתה k_0 קיים, כיוון ש- $\ell(s) < |V|$. כיוון ש- k_0 אינו מופיע ב- S, $k_0 \neq \text{hd}(s)$, וכמו-כן $\text{tail}(s)$ הוא רשימה באורך n של איברים מ- $V - \{k_0\}$, דהיינו: $\text{tail}(s) \in (V - \{k_0\})^{|V - \{k_0\}|-2}$. מכאן ש- $M = <V - \{k_0\}, \text{tail}(s)> \in \mathbf{B}$. כיוון ש- $\ell(\text{tail}(s)) = n$, ניתן להפעיל את הנחת האינדוקציה לגבי M, ולקבל ש- $H(M)$ מוגדר היטב, ו- $G' = <V - \{k_0\}, H(M)>$ הינו עץ, שהעלים שלו הם בדיוק האיברים ב- $V - \{k_0\}$, שאינם מופיעים ב- $\text{tail}(s)$. עתה $<V, H(V, s)>$ מתקבל מהעץ G' על-ידי הוספת קדקוד חדש (k_0) וקשת חדשה ($\{k_0, \text{hd}(s)\}$), שמחברת קדקוד זה לאחד הקדקודים של G' (הלא הוא $\text{hd}(s)$, שאכן שייך ל- $V - \{k_0\}$). ממשפט (5) (ג) בפרק הקודם נובע לכן בקלות, ש- $<V, H(V, s)>$ הינו עץ. העלים של עץ זה הם k_0, ואותם עלים של G', השונים מ- $\text{hd}(s)$ ($\text{hd}(s)$ אינו עלה של $<V, H(V, S)>$, כיוון שדרגתו בעץ זה היא לפחות 2). מזה ומההנחת האינדוקציה לגבי $\text{tail}(s)$ נובע, שהעלים של $<V, H(V, s)>$ הם בדיוק איברי V, שאינם נמצאים על s (זאת כיוון ש- k_0 לא נמצא על s, בעוד $\text{hd}(s)$ נמצא ב- s).

דוגמה 2:

יהי $V = \{1, \ldots, 10\}$, ו- s הרשימה שנבנתה על-ידי F בדוגמה 1 (כלומר: $s = <4, 6, 3, 4, 4, 1, 1, 4>$). כדי למצוא את $H(V, s)$ עלינו למצוא תחילה את k_0. זהו האיבר הראשון של V, שאינו מופיע ב- s, ומכאן ש- $k_0 = 2$. $\text{hd}(s)$ היא כאן 4. מהגדרת H, כדי למצוא את $H(V, s)$ עלינו למצוא תחילה את

$$H(\{1, 3, 4, \ldots, 10\}\ ,\ <6, 3, 4, 4, 1, 1, 4>)$$

ולהוסיף לקבוצת קשתות זו על V את הקשת $\{2, 4\}$. אם נבצע זאת, נקבל ש- $<V, H(V, s)>$ הוא בדיוק הגרף בציור 8 בפרק הקודם.

הלמה הבאה מראה, שמה שקיבלנו בדוגמה 2 אינו מקרי:

למה 3:

(א) אם $<V, E> \in \mathbf{T}$ אז $H(V, F(V, E)) = E$;

(ב) אם $<V, s> \in \mathbf{B}$ אז $F(V, H(V, s)) = s$.

הוכחת למה 3:

(א) באינדוקציה על $|E|$.

אם $|E| = 1$, אז $F(V, E) = \varnothing$. לכן $H(V, F(V, E)) = H(V, \varnothing) = \{V\}$. אבל כאשר $|E| = 1$, אז $|V| = 2$ ו- $E = \{V\}$. לכן $H(V, F(V, E)) = E$ במקרה זה.

נניח נכונות הטענה עבור $|E| = n$, ונניח $|E| = n + 1$. אז לפי הגדרה 1, $F(V, E) = n_1 \hat{} F(V - \{n_0\}, E - \{a\})$ כש- n_0, n_1 ו- a הם כמו בהגדרה הנ"ל. לכן $\mathrm{hd}(F(V, E)) = n_1$, ו- $\mathrm{tail}(F(V, E)) = F(V - \{n_0\}, E - \{a\})$. כדי למצוא את $H(V, F(V, E))$ עלינו למצוא (לפי הגדרה 2) את k_0 – האיבר הראשון של V, שאינו מופיע ב- $F(V, E)$. לפי למה 1 זהו האיבר הקטן ביותר בקבוצת העלים של $<V, E>$. לכן $k_0 = n_0$. מכל זה נובע, לפי הגדרה 2, ש:

$$H(V, F(V, E)) = \{\{n_0, n_1\}\} \cup H(V - \{n_0\}, F(V - \{n_0\}, E - \{a\}))$$

אבל לפי הנחת האינדוקציה $H(V - \{n_0\}, F(V - \{n_0\}, E - \{a\})) = E - \{a\}$. כמו-כן, $a = \{n_0, n_1\}$. לכן:

$$H(V, F(V, E)) = \{a\} \cup (E - \{a\}) = E$$

(ב) באינדוקציה על $\ell(s)$.

אם $\ell(s) = 0$, אז $s = \varnothing$ ו- $H(V, s) = \{V\}$. לכן $F(V, H(V, s)) = F(V, \{V\}) = \varnothing$ (כי $|\{V\}| = 1$), דהיינו $F(V, H(V, s)) = s$ במקרה זה.

נניח נכונות הטענה כאשר $\ell(s) = n$, ונניח $\ell(s) = n + 1$. אז לפי הגדרה 2, $H(V, s) = \{k_0, \mathrm{hd}(s)\} \cup H(V - \{k_0\}, \mathrm{tail}(s))$, כאשר k_0 הינו האיבר הקטן ביותר של V, שאינו מופיע ב- s. כדי למצוא את $F(V, H(V, s))$ עלינו למצוא (לפי הגדרה 1) את n_0, a ו- n_1. n_0 הינו האיבר הקטן ביותר של V, המהווה עלה של $<V, H(V, s)>$. לפי למה 2, זהו בדיוק k_0. מהנוסחה עבור $H(V, s)$ למעלה נובע לכן, שבמקרה זה $a = \{k_0, \mathrm{hd}(s)\}$, ולכן $n_1 = \mathrm{hd}(s)$ ו-

$H(V, s) - \{a\} = H(V - \{k_0\}, \mathrm{tail}(s))$.

לכן, מהגדרה 1:

$$F(V, H(V, s)) = \mathrm{hd}(s) \hat{} F(V - \{k_0\}, H(V - \{k_0\}, \mathrm{tail}(s)))$$

אבל מהנחת האינדוקציה לגבי $\mathrm{tail}(s)$ (שהיא רשימה באורך n) נובע:

$$F(V - \{k_0\}, H(V - \{k_0\}, \mathrm{tail}(s))) = \mathrm{tail}(s)$$

לכן:

$$F(V, H(V, s)) = \mathrm{hd}(s) \hat{} \mathrm{tail}(s) = s$$

מ.ש.ל.

אנו יכולים לפנות סוף-סוף אל

הוכחת משפט קיילי:

תהי V קבוצה חלקית סופית של $\mathbf{N}$ כך ש- $|V| \geq 2$.

נגדיר:

$$F_V = (Cu(F))(V) = \lambda E \in T(V).\ F(V, E)$$

$$H_V = (Cu(H))(V) = \lambda s \in V^{|V|-2}.\ H(V, s)$$

ממסקנה 1 ומלמה 2 ברור, ש- $F_V : T(V) \to V^{|V|-2}$ ו- $H_V : V^{|V|-2} \to T(V)$. נראה שהן הפוכות זו לזו. ואכן, לפי למה 3, אם $s \in V^{|V|-2}$, אז

$$(F_V \circ H_V)(s) = F_V(H_V(s)) \overset{\beta}{=} F_V(H(V,s)) \overset{\beta}{=} F(V, H(V,s)) = s$$

ולפי אותה למה, אם $E \in T(V)$, אז

$$(H_V \circ F_V)(E) = H_V(F_V(E)) = H_V(F(V,E)) = H(V, F(V,E)) = E$$

מכאן ש- $F_V \circ H_V = i_{V^{|V|-2}}$ ו- $H_V \circ F_V = i_{T(V)}$.

קיבלנו ש- F_V היא פונקציית שקילות מ- $T(V)$ על $V^{|V|-2}$. לכן

$$|T(V)| = |V^{|V|-2}| = |V|^{|V|-2}$$

מ.ש.ל.

חשוב לציין, שההוכחה של משפט קיילי מספקת אינפורמציה נוספת על עצים סופיים מעבר לנוסחה עצמה. אינפורמציה כזו מתבטאת למשל בלמות 1 ו-2 למעלה. הלמות יוצרות קשר בין עצים על קבוצה סופית V ובין רשימות באורך $|V| - 2$ של איברי V, כך שבקשר זה התכונה "להיות עלה של עץ $\langle V, E\rangle$" מוחלפת בתכונה "להיות איבר של V שאינו מופיע ברשימה s". זה מסייע לפתור בעיות קומבינטוריות שונות הקשורות בעצים. נביא עתה מספר דוגמאות.

בעיה 1:

תהי V קבוצה סופית כך ש- $|V| = n \geq 2$, ונניח $v_1, v_2 \in V$, ו- $v_1 \neq v_2$. בכמה עצים על V יהיו v_1 ו- v_2 מחוברים על-ידי קשת?

נביא עתה שני פתרונות שונים לבעיה זו. האחד מתבסס רק על נוסחת קיילי (יחד עם שיקולים קומבינטוריים נוספים). השני מתבסס גם על האינפורמציה שנותנת הוכחת

משפט קיילי (כמעט ללא שיקולים קומבינטוריים נוספים). עבור שני הפתרונות נוכל להניח, ללא הגבלת הכלליות, ש- $v_1 = 1$, $v_2 = 2$ ו- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, כך ש- $n \geq 2$.

פתרון א:

נסמן את המספר המבוקש ב- x. נגדיר עתה:

$$U = \{<E, e> \in T(V) \times P_2(V) \mid e \in E\}$$

נחשב את $|U|$ בשתי צורות:

מצד אחד:

$$U = \biguplus_{E \in T(V)} \{<E, e> \mid e \in E\} \qquad (1)$$

כיוון שלכל $E \in T(V)$ מתקיים ש- $|\{<E, e> \mid e \in E\}| = |E| = n - 1$, הרי נובע מ- (1) ש- $|U| = |T(V)| \cdot (n - 1)$, ולכן, לפי נוסחת קיילי: $|U| = n^{n-2}(n - 1)$.

מצד שני:

$$U = \biguplus_{e \in P_2(V)} \{<E, e> \mid E \in T(V) \wedge e \in E\} \qquad (2)$$

עתה ברור, שלכל e: $|\{<E, e> \mid E \in T(V) \wedge e \in E\}| = |\{E \in T(V) | e \in E\}| = x$.

לכן, מ- (2) נובע ש- $|U| = |P_2(V)| \cdot x = \binom{n}{2} x$.

משתי הנוסחאות שמצאנו עבור $|U|$ אנו מקבלים:

$$\binom{n}{2} \cdot x = n^{n-2} \cdot (n - 1)$$

ולכן

$$x = 2 \cdot n^{n-3}$$

פתרון ב:

הבה נבדוק, כיצד נראות רשימות שמצפינות עצים על $\{1, 2, \ldots, n\}$, שבהם $\{1, 2\}$ היא קשת. נעשה זאת על-ידי בחינת הפרוצדורה לבניית רשימות אלה, כפי שניתנה בהוכחת המשפט.

נניח ראשית ש- $n \geq 3$. האבחנה הראשונה שלנו היא, שלא ייתכן ש- $\{1, 2\}$ היא הקשת, שנותרת אחרונה בתהליך בניית הרשימה. הסיבה: אילו היה זה המצב, אז בשלב שלפני האחרון (שקיים, כי $n \geq 3$) 1 או 2 היה עלה, ולכן היינו בוחרים אותו יחד עם הקשת $\{1, 2\}$ כבר אז. מכאן ש- $\{1, 2\}$ נבחרת בשלב כלשהו, וייתכנו שני מקרים:

(I) הקשת $\{1,2\}$ נבחרת מיד בהתחלה. זה קורה אם 1 או 2 הוא עלה של העץ. לא ייתכן ששניהם עלים, כי יש בעץ קשת ביניהם ו- $n \geq 3$. מכאן שמקרה זה מתחלק לשני תת-מקרים זרים:

(I.1) 1 עלה של הגרף. במקרה זה הרשימה המצפינה תתחיל ב- 2, ו- 1 אינו מופיע בה כלל;

(I.2) 2 עלה של הגרף. במקרה זה הרשימה המצפינה תתחיל ב- 1, ו- 2 אינו מופיע בה כלל.

(II) הקשת $\{1,2\}$ נבחרת, אבל לא בהתחלה. גם מקרה זה מתחלק באופן טבעי לשני תתי-מקרים:

(II.1) בשלב הבחירה של $\{1,2\}$ 1 הינו עלה ו- 2 נרשם. אחרי 2 זה לא יופיע יותר שום 1. מצד שני, עד אותו שלב 1 לא היה עלה (אחרת היה נבחר עוד קודם). מכאן, שבדיוק לפני שלב זה נעשתה בחירה, שהפכה את 1 לעלה. כלומר, בדיוק לפניו נבחרה קשת המכילה את 1, הקצה השני שלה היה עלה, ו- 1 הוא זה שנרשם. היוצא מכך הוא, שבמקרה זה יש 1 ברשימה, ואחרי ה- 1 האחרון מופיע 2;

(II.2) בשלב הבחירה 2 הינו עלה ו- 1 נרשם. לפי שיקול דומה לזה של (II.1), לפני 1 זה מופיע 2, וזהו ה- 2 האחרון ברשימה.

קיבלנו שרשימות המצפינות עצים שבהם $\{1,2\}$ היא קשת, מתחלקות לארבעה סוגים, שהם בבירור זרים זה לזה:

(א) רשימות המתחילות ב- 1, ו- 2 אינו מופיע בהן.

(ב) רשימות המתחילות ב- 2, ו- 1 אינו מופיע בהן.

(ג) רשימות שגם 1 וגם 2 מופיעים בהן, ואחרי ה- 2 האחרון מופיע 1.

(ד) רשימות שגם 2 וגם 1 מופיעים בהן, ואחרי ה- 1 האחרון מופיע 2.

נבנה עתה פונקציה מקבוצת הרשימות הנ"ל אל קבוצת הרשימות באורך $n-3$ של איברי V באופן הבא:

במקרה (א) נשמיט את ה- 1 בהתחלה.

במקרה (ב) נשמיט את ה- 2 בהתחלה.

במקרה (ג) נשמיט את ה- 1, שמופיע אחרי ה- 2 האחרון.

במקרה (ד) נשמיט את ה- 2, שמופיע אחרי ה- 1 האחרון.

עתה, לכל רשימה ב- V^{n-3} יש בדיוק שני מקורות לפי פונקציה זו. האחד מתקבל על-ידי הוספת 1 בהתחלה (אם אין ברשימה 2) או אחרי ה- 2 האחרון ברשימה (אם יש

ברשימה 2). המקור השני מתקבל על-ידי הוספת 2 באופן דומה. מכאן, שמספר הרשימות מהסוג המבוקש הוא $2 \cdot n^{n-3}$, ולכן זה גם מספר העצים מהסוג המבוקש. השיקול עד כה היה בהנחה ש- $n \geq 3$. במקרה ש- $n = 2$, רואים ישירות, שמספר העצים בהם מדובר הוא 1. לכן הנוסחה $2 \cdot n^{n-3}$ נכונה גם במקרה זה.

בעיה 2:

בכמה עצים על $V = \{1, 2, \ldots, 9\}$ הקדקודים 6, 7, 8, 9 הם עלים?

פתרון:

עצים כאלה מוצפנים על-ידי רשימות באורך 7 של איברי V, שהמספרים 6, 7, 8, 9 אינם מופיעים בהם. כלומר: מדובר ברשימות באורך 7 של איברי $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. מספר הרשימות הללו הוא 5^7.

בעיה 3:

בכמה עצים על $V = \{1, 2, \ldots, 9\}$ קבוצת העלים היא בדיוק $\{6, 7, 8, 9\}$?

פתרון:

ההבדל בין בעיה זו והבעיה הקודמת היא, שבבעיה הקודמת יכלו להיות עלים נוספים מלבד 6, 7, 8 ו- 9. הפעם הקדקודים האחרים אינם עלים, ולכן הם חייבים להופיע ברשימות המצפינות את העצים. הבעיה הופכת לכן להיות: כמה רשימות באורך 7 אפשר להרכיב מ- $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, אם כל איברי קבוצה זו חייבים להופיע. בעיות מסוג זה פתרנו כבר בעבר, אם בעזרת עיקרון ההכלה וההפרדה, או בעזרת פונקציות יוצרות מעריכית (ראו דוגמה 2 בפרק ד.2, ואותה דוגמה מחדש בפרק ד.4). התשובה היא:

$$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{5}{k} (5-k)^7$$

בעיה 4:

בכמה עצים על $V = \{1, 2, \ldots, 9\}$ יש בדיוק 4 עלים?

פתרון:
בבעיה הקודמת לא הסתמכנו בעצם כלל על הזהות של העלים $\{6, 7, 8, 9\}$. כל בחירה אחרת של ארבעת העלים היתה נותנת אותה תשובה בדיוק. כיוון שניתן לבחור

את ארבעת העלים ב- $\binom{9}{4}$ צורות, התשובה (לאור הבעיה הקודמת) היא

$$\binom{9}{4}\sum_{k=0}^{5}(-1)^k\binom{5}{k}(5-k)^7$$

בעיה 5:
בכמה עצים על $V=\{1, 2, \ldots, 9\}$ יש בדיוק שני עלים?

פתרון:
ניתן לפתור בעיה זו כמו שפתרנו את הבעיה הקודמת. ברם, במקרה זה,אחרי שבחרנו שני עלים, נשאר להרכיב רשימה באורך 7 משבעת העלים הנותרים,כך שכל אחד מהם יופיע. זה אפשר לעשות, כמובן, ב- $7!$ צורות. לכן התשובה כאן היא:

$$\binom{9}{2}\cdot 7! = \frac{9!}{2}$$

לסיום נציין, שבדיקה לעומק של הוכחת משפט קיילי מראה, שאת למה 1 ניתן להכליל למשפט הבא (שאת הוכחתו נשאיר לקוראים):

משפט
אם $<V, E>$ עץ ו- $a \in V$, אז מספר הפעמים ש- a מופיע ברשימה $F(V, E)$ (המקודדת עץ זה) הוא $d(a)-1$ (כאשר $d(a)$ היא, כזכור, הדרגה של a ב- $<V, E>$).

בעיה 6:
בכמה עצים על $V=\{1, 2, \ldots, 9\}$ דרגת 1 היא 2 ?

פתרון:
לאור המשפט האחרון, השאלה שקולה לבעיה: כמה רשימות, יש באורך 7 של מספרים מ- $\{1, 2, \ldots, 9\}$, בהן 1 מופיע פעם אחת בדיוק? התשובה, כמובן, היא: $7\cdot 8^6$.