

אוניברסיטת תל-אביב  
הפקולטה למדעים מדויקים ע"ש ריימונד וברלי סאקלר  
בית-הספר למדעי המתמטיקה  
בית-הספר למדעי המחשב

מבוא למתמטיקה קדימה

פרופ' א. אברון

אוניברסיטת תל-אביב  
הפקולטה למדעים מדויקים ע"ש ריימונד וברלי סאקלר  
בית-הספר למדעי המתמטיקה  
בית-הספר למדעי המחשב

מבוא  
למתמטיקה  
בזירה

פרופ' א. אברון

4

]

© כל הזכויות שמורות למחבר ולאוניברסיטת תל-אביב

Printed in Israel 2001

נדפס בישראל תשס"א

## הקדמה

הספר שלפניכם מבוסס על קורס המועבר זה מספר שנים בבתי הספר למדעי המחשב ולמתמטיקה של אוניברסיטת תל-אביב. הספר מתחלק לשני חלקים. נושאי החלק הראשון מסווגים בדרך-כלל כ"לוגיקה ותורת הקבוצות". עם זאת, מטרתו העיקרית היא להיות מבוא ללימודי המתמטיקה בכלל. יש בדרך-כלל פער ניכר בין מה שמוקנה לתלמיד בבית-הספר העל-יסודי ובין מה שמצופה ממנו לדעת ולהבין, עת הוא מתחיל את לימודיו באוניברסיטה. החלק הראשון מהווה אפוא ניסיון לגשר על פער זה על-ידי לימוד מעמיק ויסודי של הלשון המתמטית, כמו גם מושגיה היסודיים של המתמטיקה המודרנית ושיטות ההוכחה שלה. תקוותי הגדולה היא, שהסטודנט יעזר בחומר הנלמד כאן לצורך הבנת כל קורס מתמטי אחר, שהוא לומד או ילמד בעתיד. חלקו השני של הספר מוקדש לשני נושאים קלאסיים של המתמטיקה הבדידה: קומבינטוריקה סופית ותורת הגרפים. חלק זה מוצג כהמשך ישיר של הראשון, ומיושמת בו המסגרת שנלמדה בחלק הראשון. עם זאת, מודגשים בו גם הקשרים עם ענפים אחרים של המתמטיקה (חשבון אינפיניטסימלי ואלגברה לינארית). בהתאם למטרה הפדגוגית של הספר, גם בחלק זה נשמרת רמה גבוהה של דיוק מתמטי, וניתנות הוכחות מלאות וריגורוזיות.

שני דברים ייחודיים לספר זה, שכדאי לציין, הם:

(1) בספר מושם דגש רב על הצד הלשוני. כך מוקדשים בו פרקים מיוחדים לצורות הסימון השונות של קבוצות ופונקציות, ולשימוש הנכון בהן. פרק חשוב במיוחד מוקדש לשימוש הנכון במשתנים במתמטיקה. למיטב ידיעתי, אין פרק כזה בשום ספר לימוד אחר, למרות שמרבית השגיאות הלוגיות הנעשות על-ידי סטודנטים (ולא רק סטודנטים) נובעות מאי-הבנת נושא זה דווקא. סיבה נוספת לחשיבות הרבה המוענקת לצד הלשוני היא, שמרבית הסטודנטים בקורס הם ממדעי המחשב, ואלה עתידים לעבוד הרבה עם שפות פורמליות (כולל, כמובן, שפות תכנות).

(2) בספר נעשה שימוש מסיבי בסימון-למדא עבור פונקציות. הדבר מאפשר, למשל, הבחנה בין הביטוי " $x^2$ " המסמן מספר, ובין הביטוי " $\lambda x. x^2$ " המסמל את הפונקציה המתאימה לכל  $x$  את ריבועו. כמו כן מאפשר סימון-למדא תיאור קל של פונקציות, שהתחום (או הטווח) שלהן הוא קבוצה של פונקציות, כמו גם זיהוי קל של "משתנים", לעומת "פרמטרים", בתוך ביטויים מורכבים. כדאי

לציין, שצורות הסימון הנהוגות בטקסטים מתמטיים הן בחלקן מיושנות מאוד, ומובילות כמעט בהכרח לשגיאות ולחוסר הבנה. התפתחותם של הלוגיקה ושל מדעי המחשב הולידה צורות סימון מודרניות טובות ומדויקות הרבה יותר. קרוב לוודאי, שצורות אלו ייתפשו בעתיד, לאט ובהדרגה, את מקומן של הישנות (עם זה, בספר נלמדות גם צורות הסימון הקלאסיות, כדי שהתלמיד יוכל לקרוא ללא בעיות גם טקסטים אחרים). אני מאמין, שעצם הידיעה איך צריך לכתוב מסייעת מאוד גם כאשר אין כותבים כך בפועל. בנוסף, סימון-למדא מהווה את הבסיס של שפות תכנות פונקציונליות דוגמת SCHEME (השפה בה משתמשים כיום בקורס המבוא הראשון למדעי המחשב בביה"ס למדעי המחשב של אוניברסיטת תל-אביב, כמו גם באוניברסיטאות רבות אחרות ברחבי העולם).

לנוחות קוראי הספר, סומנו פרקים או סעיפים קשים יותר על-ידי כוכבית. על סעיפים אלו ניתן לדגל. בנוסף הוכנסו קטעים מסוימים בספר בין סימני אחוז כפולים: %%. %%. קטעים אלו נועדו לקוראים מתקדמים בלבד. חלקים גדולים מהחומר סוכמו בטבלאות. רשימה מלאה של הטבלאות ניתן למצוא מיד לאחר תוכן העניינים.

הערה נוספת: הפרקים הראשונים, המוקדשים ללוגיקה, אינם קורס בלוגיקה מתמטית ואינם מהווים תחליף לקורס כזה. מטרתם רק לצייד את הסטודנט בכלים לוגיים פורמליים, שיסייעו לו בהמשך.

לסיום, ברצוני להודות לבתי הספר למתמטיקה ולמדעי המחשב על העזרה והתמיכה שהגישו לי בכתיבת ספר זה, בהדפסתו ובהוצאתו לאור.

ארנון אברון  
בית הספר למדעי המחשב  
אוניברסיטת תל-אביב

## תוכן העניינים

1	<b>א. פרקי יסוד בלוגיקה</b>
2	1.א הצרנה
13	2.א המשמעות של הקשרים והכמתים
20	3.א שקילויות לוגיות
26	4.א* כיצד מוכיחין?
38	5.א על השימוש במשתנים במתמטיקה
55	<b>ב. יסודות תורת הקבוצות</b>
56	1.ב מושגי יסוד
65	2.ב הגדרת קבוצות וסימונן
80	3.ב פעולות יסודיות על קבוצות
99	4.ב פונקציות
99	I. מושג הפונקציה
103	II. הגדרת פונקציות וסימונן
111	III. הגדרת פונקציות כסוג מיוחד של קבוצות
115	IV. דוגמאות של פונקציות חשובות
120	V. מושגים בסיסיים הקשורים בפונקציות
139	5.ב יחסים
139	I. הגדרת המושג "יחס"
141	II. פעולות על יחסים
143	III. תכונות של יחסים
146	IV. יחסי שקילות ופירוקים, קבוצות מנה
157	<b>ג. קומבינטוריקה כללית</b>
158	1.ג עוצמות ושוויון עוצמות
166	2.ג עוצמות סופיות ואינסופיות
174	3.ג סדר על עוצמות
184	4.ג פעולות על עוצמות
201	5.ג קבוצות בנות-מניה ותכונותיהן
209	6.ג עקרונות קומבינטוריים כלליים

219	<b>ד. קומבינטוריקה סופית</b>
220	1.ד עקרונות בסיסיים
235	2.ד עיקרון ההכלה וההפרדה
249	3.ד תכונות המקדמים הבינומיאליים
261	4.ד פונקציות יוצרות
289	5.ד נוסחאות נסיגה
304	6.ד משוואות נסיגה לינאריות עם מקדמים קבועים
329	<b>ה. יסודות תורת הגרפים</b>
330	1.ה מושגי יסוד
343	2.ה מסילות ומעגלים
357	3.ה עצים ויערות
371	4.ה נוסחת קיילי

## רשימת הטבלאות

5	הקשרים והכמתים העיקריים	:1.א
8	תשעה ניסוחים לטענה אחת	:2.א
21-20	שקילויות לוגיות חשובות	:3.א
26	כללי ההיסק הבסיסיים	:4.א
40	דוגמאות לאופרטורים קושרים	:5.א
85	תכונות יסודיות של האופרציות הבסיסיות	:1.ב
93	תכונות יסודיות של האופרציות המוכללות	:2.ב
98	סימונים עבור קבוצות	:3.ב
108	כללי היסוד לפישוטים	:4.ב
114	פונקציות – הגדרות בסיסיות	:5.ב
132	פונקציות – מושגים חשובים	:6.ב
162	דוגמאות לקבוצות שוות עוצמה	:1.ג
168	תכונות בסיסיות של קבוצות סופיות	:2.ג
189	התכונות היסודיות של הפעולות על עוצמות	:3.ג
190	תכונות מקבילות של קבוצות	:4.ג
193	פונקציות מתאימות לטבלה 4.ג	:5.ג
203	עובדות על קבוצות סופיות או בנות-מניה	:6.ג
210	עקרונות קומבינטוריים כלליים	:7.ג
221	עקרונות בסיסיים המיוחדים לקומבינטוריקה סופית	:1.ד
223	הגדרות אינטואיטיביות	:2.ד
256	זהויות בינומאליות חשובות	:3.ד
265	פונקציות יוצרות: התכונות היסודיות	:4.ד
271	פונקציות יוצרות: דוגמאות חשובות	:5.ד
320	משוואות נסיגה לינאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים	:6.ד