א. פרקי יסוד בלוגיקה

א.1. הצרנה

במתמטיקה עוסקים בהוכחות, והוכחות הינן סדרות של היסקים. מתוך הנחות מסוימות אנו מסיקים מסקנות. ממסקנות אלו אנו מסיקים עוד מסקנות, וכך אנו ממשיכים, עד שעולה בידינו להסיק את מה שרצינו. מה שמצדיק את ההיסקים בכל שלב ושלב הינם חוקי הלוגיקה – תורת ההגיון. כך, אם הראינו על מספר x מסוים, שהוא או גדול מ-1 או קטן מ-1– (למשל: הראינו ש- $x^2 > 1$), ואחר-כך אנו מראים שאינו יכול להיות קטן מ-1– (יען כי, לדוגמה, קיים y כך ש- $x = y^2$), או אז ביכולתנו להסיק, בעזרת ***כלל לוגי מתאים*** (עם שם נאה: "סילוגיזם דיסיונקטיבי"), ש- x גדול מ-1. לימוד כללי ההיסק הבסיסיים של הלוגיקה הינו אחת המטרות העיקריות של חלק זה. ברם, ממש כפי שהנוסחה לפתרון משוואה ריבועית הינה חסרת ערך לפתרון בעיה, כל עוד לא תורגמו נתוניה ללשון המשוואות, החושפת את הקשרים האריתמטיים ביניהם – ממש כך ידיעת כללים לוגיים עלולה שלא להועיל, בטרם תורגמו טענות הכתובות בשפות כמו עברית או אנגלית ללשון, בה נחשפים היחסים הלוגיים בין מרכיבי הטענה.

המשפט האחרון עלול להיראות סתום במקצת. ננסה להבהירו באמצעות דוגמה:

(1) "למספר שלילי אין שורש"

זוהי דוגמה לטענה מתמטית, המנוסחת באמצעות משפט בשפה העברית. בניגוד למקרים רבים אחרים, הנוסח הוא קצר וממצה. עם זאת, למי שמושג השורש (או המושג של מספר שלילי) אינו ברור (למשל: מחשב מתחיל), משפט זה הוא חסר מובן. חשוב עוד יותר הוא, שגם למי שמושגים אלו כן נהירים, עלולות להיות בעיות חמורות, עת יצטרך לטפל בטענה באופן אפקטיבי. לדוגמה, אם יתבקשו לנסח משפט, המביע את שלילתה של הטענה הנ"ל (כלומר משפט המבהיר, מה פירוש הדבר ש- (1) אינו נכון), עלולים רבים מהקוראים לסבור בטעות, שהתשובה הנכונה היא: "למספר שלילי יש שורש". תשובה כזו נובעת באופן טבעי מהמבנה התחבירי של השפה העברית, ומכך שהיפוכו של "אין" הוא "יש". כדי להיווכח, שתשובה זו אכן מוטעית, די אם נשנה את (1) ל: "למספר לא חיובי אין שורש". משפט זה הוא שקרי, כי 0 הינו מספר לא חיובי, שיש לו שורש (ולכן הוא מהווה דוגמה נגדית). עם זאת, גם המשפט "למספר לא חיובי יש שורש" הוא כמובן שקרי, ומכאן שאינו יכול להיות שלילת קודמו. שלילת טענה מסוימת הינה נכונה בדיוק כאשר אותה טענה אינה נכונה.

למעשה, שלילת (1) הינה: "קיים מספר שלילי בעל שורש". במקרה זה די אולי בהגיון אינטואיטיבי כדי להגיע לכך. עבור טענות מורכבות יותר (וכאלו יש למכביר במתמטיקה) תהליך ניסוח השלילה בצורה מועילה הוא קשה הרבה יותר - אם הוא נעשה באופן אינטואיטיבי. הוא נעשה קל ומכני, אם מבצעים תחילה תרגום לשפת הלוגיקה, ומפעילים אחר-כך את הכללים הלוגיים הרלוונטיים. הדבר דומה, שוב, למה שקורה בבעיות אלגבריות. בעיות פשוטות אפשר לפתור ישירות, ללא משוואות, בעזרת הגיון בריא. הדבר נעשה בלתי אפשרי, כשעוסקים בבעיות מורכבות יותר.

נפנה עתה לניתוח בשלבים של תוכן המשפט בדוגמה (1) ולתרגומו לשפה נוחה לטיפול, המשקפת תוכן זה.
ראשית, "שורש של מספר" הוא מספר, שאם נעלה אותו בריבוע נקבל את המספר הראשון. מספר שלילי הוא מספר קטן מאפס. אם ננסח את המשפט (1) במונחים יסודיים של כפל, שוויון, אי-שוויון וכו' (זה אינו תמיד נחוץ, אך מועיל כאן) נקבל:

(2) **"למספר הקטן מאפס אין מספר, שאם נעלה אותו בריבוע נקבל את המספר הראשון"**

זה בקושי מצלצל כעברית. בשלב זה יעדיף לכן המתרגם להחליף את המלה "אין" בביטוי כמו "אי אפשר למצוא". זה קריא יותר, ואפילו מקובל למדי בטקסטים מתמטיים, הנועדים לקוראים בעלי בגרות מתמטית[1]. עם זאת, אין ניסוח כזה מדויק, כי הנקודה פה אינה יכולתנו או אי יכולתנו למצוא שורש. ייתכן שחלק מהקוראים אינו מסוגל למצוא בכוחות עצמו (ללא עזרת מחשבון) את השורש של 12.71. מסקנת אותם קוראים מעובדה זו לא תהיה, ששורש כזה אינו קיים. הנקודה האמיתית כאן היא זו של *קיום* או אי-קיום השורש. מכאן שניסוח נכון יותר וטוב יותר ל- (2) הוא:

(3) **"למספר הקטן מאפס לא קיים מספר, שאם נעלה אותו בריבוע נקבל את המספר הראשון".**

זה עדיין מסורבל, ובהחלט לא קל להבנה. מי פה המספר הראשון ומי השני? טוב, כאן אפשר להסתדר עם זה (עם קצת רצון טוב). אך מה עם משפטים מסובכים יותר, בהם מדובר, נאמר, על ארבעה מספרים? ניסוחים מהסוג של (3) ייהפכו עבורם חיש מהר לחסרי תקווה! הפתרון לבעיה זו בכל טקסט מתמטי ראוי לשמו (וגם בשפות תכנות)

---

[1] לא לבלבל עם "בגרות במתמטיקה"!

הוא הכנסת ***מזהים*** (identifiers) עבור המספרים השונים בהם מדובר. למזהים אלו קוראים במתמטיקה בדרך-כלל ***משתנים*** (variables). על-ידי שימוש בהם נוכל לנסח את (3) כך:

(4) **"אם a מספר הקטן מאפס, אז לא קיים מספר b, כך שאם נעלה את b בריבוע, נקבל את a".**

זה כבר טוב לאין-ערוך, ובהחלט ניתן להבנה. עם זאת, כדאי לנצל את ההצלחה ולהשתמש במשתנים שהכנסנו לצורך ניסוח קצר וברור יותר של חלקי המשפט השונים:

(5) **"אם $a < 0$, אז לא קיים b, כך ש- $a = b^2$".**

בניסוח כזה, קרוב לוודאי, נמצא משפטים כאלה בטקסטים מתמטיים. השימוש בשפה העברית צומצם כאן למינימום של "אם", "אז", "לא", "קיים", "כך ש-". אלו כולם מושגים ***לוגיים*** המופיעים בכל ענפי המתמטיקה (וגם מחוץ לה, כמובן). כדאי מאוד לעשות כאן צעד נוסף ולהכניס סימונים קצרים מיוחדים גם עבור מושגים לוגיים בסיסיים אלו. בקורס זה נשתמש בסימנים הבאים:

(i) את הצירוף "אם – אז..." נחליף בסימן $\Rightarrow$. במלים אחרות: במקום "אם A אז B" נכתוב $A \Rightarrow B$ או $B \Leftarrow A$. $\Rightarrow$ נקרא קֶשֶר ***הגרירה*** (אימפליקציה בלע"ז), ומשפט מהצורה $A \Rightarrow B$ נקרא משפט גרירה. $A \Rightarrow B$ הוא גם תרגום עבור צירופים כמו "A גורר את B", "B נובע מ- A" ועוד.

(ii) במקום המלה "לא" נשתמש לעתים קרובות בסימן $\neg$. $\neg$ נקרא קֶשֶר ***השלילה*** (negation), ו- $\neg A$ יחליף גם צירופים כמו: "אין זה נכון ש- A" ואחרים.

(iii) במקום המלים "גם", "וגם" או סתם "ו-", נשתמש בסימן: $\wedge$. $\wedge$ נקרא בשם קֶשֶר ***הקוניוקציה*** (conjunction), ומשפט מהצורה $A \wedge B$ נקרא משפט קוניוקציה.

(iv) עבור המלה "או" נכניס את הסימן $\vee$. $\vee$ נקרא קֶשֶר ***הדיסיונקציה*** (disjunction), ומשפט מהצורה $A \vee B$ נקרא משפט דיסיונקציה.

(v) במקום הצירוף "אם ורק אם" (אם"ם, בקיצור) נשתמש בסימן $\Leftrightarrow$. $\Leftrightarrow$ נקרא קֶשֶר ***השקילות*** (אקוויוולנציה בלע"ז), ומשפט מהצורה $A \Leftrightarrow B$ נקרא משפט שקילות. $A \Leftrightarrow B$ הוא תרגום גם עבור צירופים כמו "A שקול ל- B", "A ו- B הם שקולים", "A הוא תנאי הכרחי ומספיק עבור B" ועוד.

(vi) במקום המלה "לכל" נשתמש בסימון $\forall$. ליתר דיוק: במקום, למשל, "לכל x מתקיים ש- ...", נכתוב $\forall x\,(\ldots)$. $\forall$ נקרא הכמת ה***אוניברסלי*** (כולל), ומשפט מהצורה $\forall x\,(\ldots)$ נקרא משפט אוניברסלי.

(vii) במקום המלים "יש", "קיים" וכו' נשתמש בסימון $\exists$. ליתר דיוק: במקום, למשל, "קיים x כך ש-...", נכתוב $\exists x\,(\ldots)$. $\exists$ נקרא הכמת ה***ישי*** (אקזיסטנציאלי), ומשפט מהצורה $\exists x\,(\ldots)$ נקרא משפט ישי.

טבלה א.1 מסכמת את מה שצריך לדעת על הקשרים והכמתים (כולל סימונים אלטרנטיביים מקובלים) והאופן בו מכניסים אותם למשפטים – מה שנקרא בטבלה "שימוש תחבירי".

טבלה א.1: הקשרים והכמתים העיקריים

שם	*מלה*	*סימן*	*סימונים אלטרנטיביים*	*שימוש תחבירי*	*ניסוחים בעברית*
גרירה (אימפליקציה)	אם ... אז	$\Rightarrow$	$\rightarrow$, $\supset$	$(A) \Rightarrow (B)$	אם A אז B, A גורר את B, B נובע מ- A
שלילה	לא	$\neg$	~	$\neg(A)$	אין זה נכון ש- A, ... לא ___
קוניוקציה	וגם	$\wedge$	&	$(A) \wedge (B)$	A וגם B, גם A וגם B, A ו- B
דיסיונקציה	או	$\vee$		$(A) \vee (B)$	A או B, A ו/או B, או ש- A או ש- B
שקילות (אקויולנציה)	אם ורק אם (אמ"ם)	$\Leftrightarrow$	$\leftrightarrow$, $\equiv$	$(A) \Leftrightarrow (B)$	A אם ורק אם B, A שקול ל- B, A הוא תנאי הכרחי ומספיק ל- B
כמת אוניברסלי	כל, לכל	$\forall$	( )	$(x)(A)$, $\forall x(A)$	לכל x מתקיים ש- A
כמת אקזיסטנציאלי	קיים, יש	$\exists$		$\exists x(A)$	קיים x כך ש- A, יש x כך ש- A

הערות

א. לא ניכנס בשלב זה למהות המושגים של "קשר" ו"כמת", שהוזכרו למעלה. דבר זה נעשה בקורס בלוגיקה.

ב. בהגדרות האחרונות השתמשנו באותיות A ו- B כמשתנים עבור משפטים או נוסחאות.

ג. בהמשך הקורס נשתמש בניסוח המשפטים שלנו (בדרך-כלל) בצירופים בשפה העברית, לצורך הנוחות הפסיכולוגית של הקריאה. בסימונים המקוצרים נשתמש בכל עת, שהדבר ייראה מועיל.

השלב של הכנסת סימונים מקוצרים כרוך, למעשה, במשהו עמוק הרבה יותר מאשר עצם הקיצור. נשים לב, למשל, שהתאמנו סימון יחיד ($\Rightarrow$) עבור הצירוף "אם ___ אז ...", הניתן בעברית על-ידי שתי מלים, *שאינן* נכתבות זו אחר זו! ברור לכן, ש*התחביר* של טענות, הנכתבות בעזרת סימנים אלו, אינו זהה לזה של הטענות המקבילות בעברית. הכנסת הסימנים מלווה אם כן בניסוח כללי תחביר מדויקים, המורים איך יש להשתמש בהם. זה מוביל באופן טבעי ליצירת שפה *פורמלית* מדויקת, דומה מבחינות רבות לשפות תכנות, אליה מתרגמים טענות מתמטיות, הכתובות בשפה יותר מילולית. לתהליך תרגום זה קוראים בשם *הצרנה* (פורמליזציה). הצורה המוצרנת של טענות מתמטיות היא בדרך-כלל קצרה ותמציתית הרבה יותר מזו הלא-מוצרנת. מה שחשוב יותר הוא, שהצורה המוצרנת חושפת את המבנה ה*לוגי* האמיתי של טענות. יתר על כן, השימוש בצורות מוצרנות מאפשר ניסוח מדויק של חוקים לוגיים ושימוש בהם (בדומה לניסוח חוקים אלגבריים ושימוש בהם לצורך טיפול במשוואות ובזהויות). צורות מוצרנות הן גם הכרחיות לצורך טיפול ממוחשב בידע.

תיאור מלא ומדויק של שפות לוגיות פורמליות ניתן בקורס בלוגיקה מתמטית. בקורס המבוא הנוכחי נסתפק בדוגמאות ובהבנה אינטואיטיבית של התחביר. כדוגמה ראשונה נצרין באופן מלא את (5) למעלה:

$$\forall a((a < 0) \Rightarrow (\neg\exists b(b^2 = a))) \quad (6)$$

אין ספק, שריבוי הסוגריים כאן מפריע מאוד לעיניים (ולהבנה) של בני-אנוש (למחשב, אגב, אין שום בעיה עם זה). לכן, ממש כמו באלגברה, שם אנו רושמים $a \cdot b + a \cdot c$ (או אפילו $ab + ac$) במקום $(a \cdot b) + (a \cdot c)$, גם כאן יש הסכמים שונים (אותם לא

נפרט במדויק) המאפשרים השמטת חלק ניכר מהסוגריים. משפטים כמו (6) נכתוב, למשל, בעתיד בצורה הבאה:

$$\forall a(a < 0 \Rightarrow \neg\exists b.\ b^2 = a) \quad (7)$$

הערה:
הנקודה אחרי b כמוה כסוגר שמאלי. הסוגר הימני המתאים מושמט, ומקומו נקבע על-פי ההגיון. (ליתר דיוק: הוא או בסוף המשפט או לפני הסוגר הימני הראשון, שהסוגר השמאלי המתאים לו נמצא לפני נקודה זו.)

את (7) יש לקרוא בעברית כך: "לכל a, אם a קטן מאפס, אז לא קיים b, כך ש- b^2 שווה ל- a".

לעתים קרובות מקצרים אפילו את (7) וכותבים רק:

$$\forall a < 0\ \neg\exists b.\ b^2 = a \quad (8)$$

את (8) יש לקרוא בעברית כך: "לכל a קטן מאפס לא קיים b, כך ש- b^2 שווה ל- a" או, בעברית טובה יותר: "לשום a הקטן מאפס לא קיים b, כך ש- b^2 שווה ל- a". צורה (8) הינה לכן לא רק קצרה יותר מ- (7), אלא אף קרובה יותר לעברית. בעברית אכן מקובל להגיד, בדרך-כלל, "לכל a קטן מאפס..." ולא "לכל a, אם a קטן מאפס אז...". אולם יש לזכור תמיד, ש- (7) הוא המשקף נכונה את המבנה הלוגי של המשפט, ו- (8) אינו אלא קיצור של (7). כללית, משפט מהצורה "$\forall a < b ...$" הינו תמיד קיצור של $\forall a(a < b \Rightarrow ...)$, ו- "$\exists a < b\ ...$" הינו תמיד קיצור של $\exists a(a < b \wedge ...)$. כדאי לשנן עובדות אלה היטב. (שוב, אנלוגיה מתחום האלגברה עשויה לעזור: בנוסחאות הקשורות במשוואות ריבועיות אנו כותבים לעתים קרובות "Δ" במקום $b^2 - 4ac$. אנו זוכרים אבל תמיד קיצור של מה הוא Δ, ושלצורך שימוש בנוסחאות יש בדרך-כלל להציב את $b^2 - 4ac$ במקום Δ.)

טבלה א.2 מרכזת את שמונת הניסוחים שמצאנו למשפט לעיל. מופיע שם ניסוח נוסף, תשיעי, אליו נגיע בהמשך (פרק א.3).

טבלה א.2: תשעה ניסוחים לטענה אחת

(1)	למספר שלילי אין שורש
(2)	למספר הקטן מאפס אין מספר, שאם נעלה אותו בריבוע נקבל את המספר הראשון
(3)	למספר הקטן מאפס לא קיים מספר, שאם נעלה אותו בריבוע נקבל את המספר הראשון
(4)	אם a מספר הקטן מאפס, אז לא קיים מספר b, כך שאם נעלה את b בריבוע נקבל את a
(5)	אם $a < 0$ אז לא קיים b כך ש- $b^2 = a$
(6)	$\forall a((a < 0) \Rightarrow (\neg\exists b(b^2 = a)))$
(7)	$\forall a(a < 0 \Rightarrow \neg\exists b.\ b^2 = a)$
(8)	$\forall a < 0\ \neg\exists b.\ b^2 = a$
(9)	$\forall a < 0\ \forall b.\ b^2 \neq a$

הערות

א. אם נשווה את (7) למשפט המקורי (1), ניווכח, שהניסוח המקורי בעברית לא כלל שום גרירה (ושום אם _____ אז ...). גם המלה "לכל" לא הופיעה שם כלל. הכנסת ה"אם _____ אז ..." נעשתה באופן טבעי למדי במעבר מ- (3) ל- (4), בעוד "לכל" הוכנס באופן מפורש בהצרנה (בצורה של "$\forall$"), כשעברנו מ- (5) ל- (6). הרהור קצר בעניין יבהיר, שמשפט (5) מתייחס אכן לכל a. כשאנו אומרים "אם a קטן מאפס אז ל- a יש תכונה P", כוונתנו היא, ש*כל* מספר a שננסה לבדוק, אם יתברר שהוא קטן מאפס, אזי ניווכח שיש לו גם התכונה P. השימוש ב"אם" בשפה העברית יש לו לעתים קרובות ביותר משמעות אוניברסלית, דהיינו איזה "כל" שהוא מסתתר מאחוריו. תהליך ההצרנה חושף "כל" זה. במקרה הנוכחי הוא חשף גם, שמדובר בכלל בגרירה. בכל זה אין מקריות. כבר הדגשנו, שתהליך ההצרנה חושף את המבנה הלוגי הפנימי ("מבנה התשתית", בלשונו של הבלשן הנודע נועם חומסקי) המסתתר מאחורי המבנה החיצוני ("מבנה השטח") של

טענות בעברית (או כל שפה טבעית אחרת). מבנה לוגי פנימי זה אינו דומה בהכרח למבנה הטענה בעברית!

ב. דוגמה נוספת להבדל בין התחביר המקורי של משפט לבין תחביר גרסתו המוצרנת נותן קשר השלילה ($\neg$), המקביל למלה "לא". כשאנו אומרים בעברית ש- "x הוא לא גדול מ- y" (או ש- "x אינו גדול מ- y", שזו עברית יפה יותר), ה"לא" מופיע באמצע המשפט, אחרי ה- "x". בשפה המוצרנת כותבים פשוט $\neg(x > y)$ או רק $\neg x > y$. סימן השלילה מופיע לפני כל מה שהוא בא לשלול. דבר זה משקף נכונה את המבנה הלוגי ומונע טעויות.

ג. התחביר של (6) (שהוא (7) כתוב בצורה מלאה) אינו היחיד הבא בחשבון. בשפת התכנות LISP וקרובות משפחתה (כמו Scheme) כותבים, למשל, $(+, a,b)$ במקום $a + b$ ו- $(\Rightarrow,A,B)$ במקום $(A) \Rightarrow (B)$. (6) או (7) ייכתב שם בדרך-כלל כך:

$$(\forall, a, (\Rightarrow, (<, a, 0) , (\neg, (\exists, b, (=, (* *, b, 2), a)))))$$

לאמתו של דבר, צורה זו אכן משקפת טוב עוד יותר את המבנה התחבירי האבסטרקטי של המשפט ומקלה על המכניזציה של עבודת הניתוח התחבירי (parsing). עם זאת, למי ש- LISP אינה שפת אמו, צורה זו קשה יותר להבנה.

ד. ב- (6) (או (7)) מופיעות הנוסחאות $a < 0$ ו- $b^2 = a$. המשפט כולו נבנה מנוסחאות אלו בעזרת הסימונים עבור המושגים הלוגיים וכללי התחביר שלהם. אנו אומרים לכן, ש- $b^2 = a$ ו- $a < 0$ הן הנוסחאות ***האטומיות*** בפסוק הנ"ל. כשאנו עושים הצרנה, עלינו להחליט גם, מה נרצה לראות בגדר נוסחה אטומית ומה כנוסחאות הדורשות ניתוח נוסף. לא תמיד עומד לרשותנו סימון סטנדרטי ומקובל, כמו במקרה של $a^2 = b$ ו- $a < 0$. כאשר זה המצב עלינו להכניס סימונים משלנו.

כל זה נשמע, קרוב לוודאי, די מעורפל. כיוון שאין זה קורס בלוגיקה, ומטרתנו כאן היא שימוש בהצרנות ככלי-עזר, לא נלמד את הנושא באופן שיטתי, אלא נסתפק בדוגמאות, שיבהירו (כך אנו מקווים) את העניין וידגימו, איך מתבצעות הצרנות בפועל. הדוגמאות מורכבות ממשפט בעברית המלווה בהצרנה מתאימה.

♦ **דוגמה 1:**

כל בני האדם הם בני תמותה.

$$\forall x(\text{human}(x) \Rightarrow \text{mortal}(x))$$

♦ דוגמה 2:

יהודי הוא מי שאמו יהודייה, או עבר גיור.

$$\forall x(\text{Jew}(x) \Leftrightarrow (\text{Jew}(\text{mother\_of}(x)) \vee \text{Guyar}(x)))$$

♦ דוגמה 3:

לכל משוואה ריבועית, שבה הדיסקרימיננטה אינה שלילית, יש פתרון.

$$\forall a\forall b\forall c((a \neq 0 \wedge \neg (b^2 - 4a\cdot c < 0)) \Rightarrow \exists x.a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0)$$

♦ דוגמה 4:

דרך שתי נקודות עובר קו ישר.

$$\forall A\forall B(\text{point}(A) \wedge \text{point}(B) \wedge A \neq B \Rightarrow \exists \ell\, (\text{line}(\ell) \wedge \text{on}(A, \ell) \wedge \text{on}(B, \ell)))$$

♦ דוגמה 5:

לשני ישרים יש לכל היותר נקודה אחת משותפת.

$$\forall \ell\, \forall m(\text{line}(\ell) \wedge \text{line}(m) \wedge \ell \neq m \Rightarrow \neg\exists A\exists B(A \neq B \wedge \text{point}(A) \wedge \text{point}(B) \wedge$$
$$\wedge\, \text{on}(A, \ell) \wedge \text{on}(B, \ell) \wedge \text{on}(A,m) \wedge \text{on}(B,m)))$$

כדאי לשים לב, איך בכל ההצרנות כמעט מלווה המלה "כל" ($\forall$) בגרירה ($\Rightarrow$), בעוד מושג הקיום ($\exists$) מלווה בקוניוקציה ($\wedge$).

הערה:

אמצעי נפוץ כדי למנוע התארכות טענות (כמו בדוגמה 5) הוא שימוש במשתנים מסוג מיוחד עבור עצמים מסוג מיוחד. כך, אם נסכים שאותיות לטיניות קטנות תשמשנה כמשתנים עבור ישרים, בעוד אותיות לטיניות גדולות תשמשנה כמשתנים עבור נקודות, נוכל לקצר את ההצרנה בדוגמה 5 ל-

$$\forall \ell\, \forall m(\ell \neq m \Rightarrow \neg\exists A\exists B(A \neq B \wedge \text{on}(A, \ell) \wedge \text{on}(B, \ell) \wedge \text{on}(A,m) \wedge \text{on}(B,m)))$$

עקרון הקיצור כאן הוא ש- $\forall \ell \ldots$ הוא קיצור של $\forall \ell\, (\text{line}(\ell) \Rightarrow \ldots$, $\exists \ell \ldots$ הוא קיצור של $\exists \ell\, (\text{line}(\ell) \wedge \ldots)$, ו- $\forall A \ldots$ הוא קיצור של $\forall A(\text{point}(A) \Rightarrow \ldots)$. אמצעי זה אינו זר לקוראים, הרגילים מן הסתם לשימוש באותיות i, j, k, ℓ, m, n כמשתנים עבור מספרים טבעיים, α, β, γ כמשתנים עבור זוויות וכו'. כדאי לשים לב, שאם נרחיב את ההצרנה המקוצרת של דוגמה 5 לפי הכללים לצורה מלאה, לא נקבל בדיוק את ההצרנה המקורית, אלא משהו השקול לה לוגית (על סמך כללים שנלמד בהמשך).

♦ דוגמה 6

לכל מספר ראשוני ניתן למצוא מספר ראשוני גדול יותר.

בדוגמה זו ניתנות 3 הצרנות, מותאמות לדרגת הפירוט אליה נרצה להגיע. תרגום מיידי ייראה כך:

$$\forall n(\mathrm{prime}(n) \Rightarrow \exists k(\mathrm{prime}(k) \wedge n < k)) \qquad \text{(I)}$$

בהצרנה זו מבוטאת העובדה ש- n הוא מספר ראשוני על-ידי נוסחה אטומית: $\mathrm{prime}(n)$. את "ניתן למצוא" תרגמנו ל- "$\exists$" (כלומר "קיים"); הקיצורים שלנו אינם משקפים את ההבדל הדק הקיים כאן, ומרבית הטקסטים המתמטיים בלאו הכי מתעלמים ממנו. כדאי גם לשים לב לכך, שבהצרנה (I) שוב מתורגמת המלה "לכל" לשילוב של $\forall$ ו- $\Rightarrow$, בעוד "קיים" – לשילוב של $\exists$ ו- $\wedge$.

הבעיה בהצרנה זו הינה, שמושג "המספר הראשוני" אינו נחשב בדרך-כלל למושג בסיסי, אלא למושג, *שמגדירים* אותו בעזרת מושגים בסיסיים יותר. מספר ראשוני מוגדר כמספר גדול מאחד, שמתחלק רק בעצמו ובאחד. הצרנת הגדרה זו היא:

$$\mathrm{Prime}(n) =_{Df} \forall i(i \setminus n \Rightarrow i = 1 \vee i = n) \wedge n > 1$$

בשורה האחרונה, "\" הוא סימן מקובל ל"מחלק את" (כלומר $i \setminus n$ פירושו "i מחלק את n" או "n מתחלק ב- i"). הסימן $=_{Df}$ פירושו, שאגף ימין מהווה הגדרה של מה שכתוב בצד שמאל. אם נציב הגדרה זו ב- (I) למעלה, נקבל את ההצרנה היותר מפורטת הבאה:

$$\text{(II)} \quad \forall n((\forall i(i \setminus n \Rightarrow i = 1 \vee i = n) \wedge n > 1) \Rightarrow \exists k(\forall i(i \setminus k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow i = 1 \vee i = k) \wedge k > 1 \wedge n < k))$$

בהצבה זו החלפנו, כמובן, לא רק את $\mathrm{prime}(n)$ בהגדרתו, אלא גם את $\mathrm{prime}(k)$.

גם מושג ההתחלקות אינו נחשב, בדרך-כלל, מושג בסיסי. אנו אומרים שמספר n מתחלק במספר k, אם n שווה למכפלה של k באיזשהו מספר (שלם). נצרין זאת:

$$k \setminus n =_{Df} \exists i(n = k \cdot i)$$

אם נציב הגדרה זו ב- (II), נקבל את ההצרנה המפורטת והבסיסית מאוד הבאה:

$$\forall n((\forall i(\exists j(n = i{\cdot}j) \Rightarrow i = 1 \vee i = n) \wedge n > 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists k(\forall i(\exists j(k = i{\cdot}j) \Rightarrow i = 1 \vee i = k) \wedge k > 1 \wedge n < k)) \qquad \text{(III)}$$

אם נכניס למקומם את כל הסוגריים שהשמטנו (דבר שעלול להיות חיוני פה כדי להבטיח קריאה נכונה), נקבל:

$$\forall n(((\forall i((\exists j(n = i{\cdot}j)) \Rightarrow ((i = 1) \vee (i = n)))) \wedge (n > 1)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists k(((\forall i((\exists j(k = i{\cdot}j)) \Rightarrow ((i = 1) \vee (i = k)))) \wedge (k > 1)) \wedge (n < k))))$$

יש שתי הערות, שחשוב לציין ביחס להצרנה האחרונה. ראשית, כשהצבנו את ההגדרה $i \backslash n$ ב- (II) שינינו את המשתנה i שהופיע בהגדרה למשתנה אחר: j. הדבר נעשה כיוון שהמשתנה i היה כבר "תפוס" בתוך (II) (ובתוך $i \backslash n$). העיקרון כאן הוא, שאין הבדל בין

$$k \backslash n =_{Df} \exists i(n = k \cdot i)$$

לבין

$$i \backslash n =_{Df} \exists j(n = i \cdot j)$$

ממש כשם שאין הבדל בין הזהות האלגברית $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ובין הזהות $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ שינוי כזה של שמות משתנים, כדי למנוע שימוש באותו משתנה במובנים שונים (במסגרת אותו קונטקסט), נעשה תכופות במתמטיקה. כך כבר בבית-הספר התיכון נהוג לייעץ לתלמידים מתחילים, שכאשר מתבקשים הם לפרק את $4a^2 - 9b^2$ לפי הנוסחה $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, כדאי שישנו תחילה את הנוסחה ל- $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ ואז יציבו $x = 2a$, $y = 3b$. זאת, כיוון שבהצבה ה"ישירה" $a = 2a$, $b = 3b$ יש למשתנה a (למשל) מובנים שונים בשני האגפים של $a = 2a$. (לשינוי המשתנים כאן קוראים כלל α, ועוד נדון בו בהרחבה בהמשך.)

הערה שנייה, מובנת הרבה יותר, היא, ש- (III) הוא בלתי ניתן לקריאה ולהבנה על-ידי בני-תמותה רגילים. זוהי בדיוק הסיבה מדוע אנו משתמשים ב*הגדרות* בתחומי המדע השונים. עקרונית, ניתן לבטא כל משפט בעזרת מושגי היסוד שלנו, ואין שום צורך בהגדרות. מעשית, נקבל כך משפטים מדרגת סיבוכיות כזו, שלא נוכל בשום פנים להבינם, או אפילו לנסחם ללא שגיאות. בדוגמה הנוכחית, למשל, נתחיל תמיד בהצרנה (I), ורק אם יתעורר הצורך נציב את ההגדרה של $\mathrm{prime}(n)$ או של $i \backslash k$.

א.2. המשמעות של הקשרים והכמתים

הסמנטיקה של הקשרים והכמתים (דהיינו: מובנם) מוסברת בדרך-כלל על-ידי תיאור התנאים לכך, שטענה הנבנית בעזרתם תהיה נכונה (לתנאים אלו קוראים תנאי האמת של הטענה (truth conditions)). תיאור תנאים אלו פשוט מאוד ואינטואיטיבי במקרים של $\wedge$, $\vee$ ו- $\neg$:

1. $A \wedge B$ נכונה כאשר (ורק כאשר) שני מרכיבי הקוניוקציה, A ו- B הינם נכונים.
2. $A \vee B$ נכונה כאשר (ורק כאשר) לפחות אחד משני המרכיבים של הדיסיונקציה (דהיינו A ו- B) הינו נכון. (משמעות "או" בטקסטים מתמטיים היא לכן מה שמצוין לפעמים ב"ו/או" בחוזים משפטיים).
3. $\neg A$ נכון כאשר A אינו נכון (ורק אז).

אפשר לסכם את היחס בין נכונות/אי נכונות $A \wedge B$, $A \vee B$ ו- $\neg A$ לבין נכונות מרכיביהם בעזרת הטבלאות הבאות, המכונות "טבלאות אמת". בטבלאות אלו "t" הוא קיצור של "true" (אמיתי) ו- "f" הוא קיצור של "false" (שקרי).

A	$\neg A$
t	f
f	t

A	B	$A \wedge B$
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	f

A	B	$A \vee B$
t	t	t
t	f	t
f	t	t
f	f	f

כדי להבין את הטבלה, ניקח לדוגמה את השורה השלישית בטבלה של $\vee$. משמעותה היא, שאם A טענה שקרית ו- B טענה אמיתית, אז $A \vee B$ הינה טענה אמיתית.

הרעיון שעומד מאחורי טבלאות האמת הוא, שערך האמת של משפט מורכב תלוי אך ורק בערכי האמת של מרכיביו ולא בשום דבר אחר. עקרון זה נראה ברור למדי עבור הקשרים $\wedge$, $\vee$ ו- $\neg$. אך מה בדבר קשר הגרירה? האם גם כאן תלויה נכונות או אי-נכונות $A \Rightarrow B$ אך ורק בערכי האמת של A ו- B? במלים אחרות: האם גם את המובן של $\Rightarrow$ ניתן לתאר בעזרת טבלת אמת? אינטואיטיבית, התשובה עלולה במבט

ראשון להיות שלילית. כדי להצדיק את טבלת האמת, שבכל זאת נביא בהמשך, יועיל אם נברר תחילה את המשמעות האינטואיטיבית של הכמתים.

4. $\forall yP$ נכון בתחום מסוים, אם לכל אלמנט באותו תחום יש התכונה המתוארת על-ידי P. לדוגמה $\forall z(z^2 \neq -1)$ נכון בתחום של המספרים הממשיים, אך אינו נכון בתחום המספרים המרוכבים (כי אין זה נכון, למשל, ש- $i^2 \neq -1$). אינטואיטיבית מייצג $\forall$ מעין קוניוקציה אינסופית. כך המובן של $\forall x(x + 1 > x)$ בתחום המספרים הטבעיים זהה ל-

$$(0 + 1 > 0) \wedge (1 + 1 > 1) \wedge (2 + 1 > 2) \wedge (3 + 1 > 3) \wedge \ldots$$

5. $\exists yP$ נכון בתחום מסוים, אם קיים אלמנט באותו תחום עם התכונה המתוארת על-ידי P. כך לדוגמה $\exists x(x \cdot 2 = 3)$ נכון בתחום של המספרים הממשיים (ל- $x = 3/2$ התכונה המבוקשת), אך לא בתחום המספרים הטבעיים. אינטואיטיבית מייצג $\exists$ מעין דיסיונקציה אינסופית. כך, לדוגמה, נכונות $\exists z(z^2 - 7z + 12 = 0)$ בתחום המספרים הטבעיים זהה ל-

$$(0^2 - 7 \cdot 0 + 12 = 0) \vee (1^2 - 7 \cdot 1 + 12 = 0) \vee (2^2 - 7 \cdot 2 + 12 = 0) \vee \ldots$$

הפסוק לכן נכון בתחום זה, כי המרכיבים הרביעי והחמישי של "דיסיונקציה אינסופית" זו הינם נכונים (אחד מהם היה מספיק, כמובן).

6. נפנה עתה לקשר הגרירה. נתחיל במספר דוגמאות.

א. "אם ריבוע של מספר אחד גדול או שווה מריבוע של מספר אחר, אז או ששניהם שליליים, והראשון גדול או שווה מהשני, או ששניהם חיוביים, והשני גדול או שווה מהראשון" (*שקרי* במספרים הממשיים!).
הצרנה: $\forall x \forall y(x^2 \geq y^2 \Rightarrow ((x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x \geq y) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0 \wedge x \leq y)))$

ב. "אם n מספר זוגי, אז $2^n - 1$ מתחלק ב-3" (אמיתי בטבעיים).
הצרנה: $\forall n((\exists j.n = 2j) \Rightarrow (\exists k.2^n - 1 = 3k))$
או: $\forall n(2\backslash n \Rightarrow 3\backslash 2^n - 1)$

ג. "אם $n > 1$, אז $n^2 > 0$" (אמיתי בטבעיים).
הצרנה: $\forall n(n > 1 \Rightarrow n^2 > 0)$

ד. "אם $n > 0$, אז $n^2 > 1$" (שקרי בטבעיים).
הצרנה: $\forall n(n > 0 \Rightarrow n^2 > 1)$

בכל הדוגמאות הללו פורק בתהליך ההצרנה הצירוף "אם __ אז ... *לשילוב* של הקשר $\Rightarrow$ והכמת $\forall$. כבר בפרק הקודם הדגשנו, שזוהי תופעה כללית. פרט לדוגמאות בספרי לימוד של לוגיקה, לעולם לא נמצא בטקסטים מתמטיים נורמליים טענות מוזרות כמו: "אם $3 \neq 2$ אז $5 = 5$". למשפטי אם-אז יש תמיד איזשהו תוקף אוניברסלי, ולהצרנתם יש בדרך-כלל הצורה:

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (P \Rightarrow Q).$$

עתה, לפי המשמעות של $\forall$, טענה מהסוג $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ (למשל) נכונה בתחום מסוים, אם לכל איבר a בתחום, הטענה $P(a) \Rightarrow Q(a)$ היא נכונה. כך, למשל, הטענה מדוגמה (ג) נכונה במספרים הטבעיים, אם ורק אם כל אחד מאינסוף הפסוקים הבאים הינו אמיתי:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & 0 > 1 \Rightarrow 0^2 > 0 \\ \text{(ii)} & 1 > 1 \Rightarrow 1^2 > 0 \\ \text{(iii)} & 2 > 1 \Rightarrow 2^2 > 0 \\ & \vdots \end{array}$$

עתה הטענה המובעת בדוגמה (ג) היא ללא ספק נכונה אינטואיטיבית.[2] כיוון שכך, ברור, שעלינו לקבל ש- $0 > 1 \Rightarrow 0^2 > 0$ נכון גם כן. ברם, הסיבה היחידה האפשרית לנכונות פסוק זה היא העובדה, שהרישא שלו, $0 > 1$, הינה שקרית. בדיקת המקרים האחרים (ודוגמאות אחרות) מראה, שתמיד טענה מהצורה $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ מתקבלת כנכונה בתחום מסוים, אם לכל a בתחום, או ש- $P(a)$ שקרי, או ש- $Q(a)$ אמיתי. במלים אחרות, $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ שקול ל- $\forall x(\neg P(x) \vee Q(x))$. זה מוביל באופן בלתי נמנע לזיהוי $A \Rightarrow B$ עם $\neg A \vee B$ ולטבלת האמת הבאה עבור $\Rightarrow$:

A	B	$A \Rightarrow B$
t	t	t
f	t	t
t	f	f
f	f	t

---

[2] היא לא ה*אינפורמטיבית* ביותר האפשרית, כי $\forall n(n > 0 \Rightarrow n^2 > 0)$ ללא ספק אינפורמטיבית יותר ועדיין נכונה. עובדה זו אינה גורעת אבל במאומה מאמיתות הטענה בדוגמה זו.

פסוק (i) למעלה מהווה דוגמה לשורה האחרונה בטבלה זו, פסוק (ii) – לשורה השנייה, ופסוק (iii) – לשורה הראשונה. אשר לשורה השלישית, היא היחידה בטבלה, שהינה מובנת מאליה. כדוגמה ספציפית יכול לשמש הפסוק בדוגמה (ד) למעלה ($(\forall n(n > 0 \Rightarrow n^2 > 1)$). ברור שפסוק זה שקרי, כי 1 מהווה דוגמה נגדית: $1 > 0 \Rightarrow 1^2 > 1$ אינו נכון לפי השורה השלישית בטבלת האמת של $\Rightarrow$, וגם לא לפי כל אינטואיציה שהיא בדבר גרירה.

הפירוש של $\Rightarrow$ לפי טבלת האמת האחרונה נתקל בדרך-כלל בתמיהה ובחוסר הסכמה על-ידי מי שפוגש בו לראשונה. מקור העניין הוא באי-הבנה. למעשה, הקשר $\Rightarrow$, בו אנו משתמשים בלוגיקה המתמטית (והידוע בשם: "גרירה מטריאלית"), ***אינו*** תרגום מלא ומדויק של "אם... אז" בעברית, אלא לכל היותר אפרוקסימציה ראשונה שלו. תרגום מדויק ניתן, כמעט תמיד, על-ידי שילוב של $\forall$ ו- $\Rightarrow$. גם כאן תהליך ההצרנה חושף מבנה פנימי עמוק יותר, המוסתר עת משתמשים בשפה טבעית. במקרה זה מדובר בפירוק מושג הגרירה למושגים בסיסיים (ופשוטים) יותר.

7. לבסוף, משמעות $\Leftrightarrow$ היא פשוט גרירה בשני הכיוונים: $A \Leftrightarrow B$ נכון אם (ורק אם) $A \Rightarrow B$ ו- $B \Rightarrow A$ נכונים שניהם. במלים אחרות, $A \Leftrightarrow B$ הוא קיצור של $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. קל למצוא מזה את טבלת האמת המתאימה ל- $\Leftrightarrow$, ואנו משאירים זאת לקורא.

טבלאות אמת אינן רק כלי להסבר המובן של קשרים, אלא גם כלי שניתן להשתמש בו לצורך היסקים ולצורך בדיקת טיעונים. הדבר אפשרי, כאשר ההיסקים והטיעונים בהם מדובר מתבססים בעיקר על הקשרים, בעוד לכמתים תפקיד משני (אם בכלל). העיקרון פשוט. באופן כללי, אנו אומרים, שטענה B נובעת לוגית מטענות $A_1, \ldots, A_n$ (סימון: $A_1, \ldots A_n \vdash B$) אם אחרי שהצרנו את כולן בשפה פורמלית מתאימה, מקבלים ש- B חייב להיות נכון בכל פירוש, לפיו $A_1, \ldots, A_n$ נכונים כולם. כאשר רק הקשרים מעורבים, "פירוש" אינו יותר מאשר מתן ערכי אמת לנוסחאות האטומיות השונות. טבלאות האמת מאפשרות אז לנו לבדוק באילו פירושים (אם בכלל) $A_1, \ldots, A_n$ יוצאים נכונים כולם, ואם B אכן נכון גם הוא בכל הפירושים הללו.

נביא מספר דוגמאות ספציפיות, שמהן יהיה ברור, כיצד הדבר נעשה באופן שיטתי.

◆ **דוגמה 1:**

ראובן ושמעון דנים בסוגייה החשובה: מי זכה באליפות ישראל בכדורגל בשנת 1979?

ראובן: אני לא זוכר מי זו היתה בדיוק, אבל אני יודע בוודאות, שזו היתה אחת הירושלמיות, הפועל או בית"ר. את הפקק, שנתקעתי בו באותו ערב בדרך לירושלים, לא אשכח לעולם!

שמעון: לא ייתכן, שזו היתה הפועל ירושלים. במחצית השנייה של שנות השבעים היא שיחקה בכלל בליגה הארצית, לא הלאומית!

ראובן: אם כך, היתה זו בית"ר ירושלים!

בעזרת ניתוח אנליטי הסיק ראובן מסקנה לוגית מהנתונים, עליהם היתה הסכמה. נוכל לבדוק את תקפות מסקנתו באופן הבא. נסמן:

P – "בית"ר ירושלים זכתה באליפות ב-1979"

Q – "הפועל ירושלים זכתה באליפות ב-1979"

בסימונים אלו, האינפורמציה שסיפק ראובן היא: $P \vee Q$

האינפורמציה שסיפק שמעון היא: $\neg Q$

המסקנה של ראובן היא: P

לדעתו של ראובן, לפי הסיפור, $P \vee Q\, ,\, \neg Q \mid\!- P$ (כלומר: P נובע לוגית מ- $P \vee Q$ ומ- $\neg Q$). נוכל לאמת את צדקתו על-ידי טבלאות אמת, בהן נבדוק את כל האפשרויות למתן ערכי אמת ל- P ול- Q, וחישוב ערכי האמת של $\neg Q$, $P \vee Q$ ו- P בכל אחת מהן:

	P	Q	$P \vee Q$	$\neg Q$	P
	t	t	t	f	t
*	t	f	t	t	t
	f	t	t	f	f
	f	f	f	t	f

אנו רואים, שהשורה היחידה, שבה הנתונים $P \vee Q$ ו- $\neg Q$ נכונים שניהם, היא השורה השנייה, ובאמת גם P נכונה בשורה זו. מכאן, שראובן צדק.

הערות

א. באומרנו, שהטבלה מראה שראובן צדק, כוונתנו רק להיסק הלוגי שלו. הטבלה אינה מוכיחה, שאכן בית"ר ירושלים זכתה באליפות ב-1979. היא מוכיחה רק, שאם הנתונים נכונים, אז זה המצב. גם אם אחד מהשניים טעה באינפורמציה

שסיפק, גם אז היתה עדיין המסקנה נובעת לוגית מהנתונים (אך לא היתה אז נכונה בהכרח). רק כאשר אנו יודעים בוודאות, שהנתונים נכונים, משמשת הטבלה ערובה לכך, שגם המסקנה נכונה.

ב. העמודה האחרונה בטבלה למעלה היא חזרה על העמודה הראשונה, ובמקרים מעשיים היינו מוותרים עליה ומתייחסים לעמודה הראשונה גם כעמודת המסקנה.

♦ **דוגמה 2:**

אוהד של אברטון מסביר למה אינו יכול לסבול את אוהדי ליברפול: "אם מישהו הוא סוציאליסט, אז הוא אוהב את הצבע האדום. אוהדי ליברפול אוהבים את הצבע האדום. מכאן שהם סוציאליסטים!"

אם נסמן כאן ב- A את הטענה, שאוהד ליברפול אוהב את הצבע האדום, וב- B את הטענה שאוהד ליברפול הוא סוציאליסט, הרי ברור, שבאופן בסיסי כוונת אותו אוהד חכם היא, שכיוון ש- $B \Rightarrow A$ ו- A נכונים, אז גם B נכון. במלים אחרות, לדעתו $B \Rightarrow A, A \vdash B$.

כדי להיווכח, שלא זה המצב, די אם ניקח את הפירוש, שבו A מקבל את הערך t, ו- B את הערך f. לפי טבלת האמת של $\Rightarrow$, $B \Rightarrow A$ מקבל את הערך t בפירוש זה, ולכן זהו פירוש, שבו שתי ההנחות נכונות, והמסקנה לא. נשים לב, שלא היינו חייבים כאן לבדוק את כל השורות של טבלת האמת. כדי *להפריך* טיעון, די שנספק שורה אחת המפריכה אותו. רק כדי *לאמת* אותו יש לבדוק את כולן.

האוהד שלנו יוכל לטעון אבל, כמו כל פוליטיקאי מצוי, ששמנו בפיו דברים, אותם הוא לא אמר. הוא מעולם לא אמר ש- $B \Rightarrow A$. זוהי רק פרשנות מסולפת של דבריו. פורמלית – הצדק אתו. נעשה לכן הצרנה *מדויקת* של דבריו. לצורך זאת נשתמש בקיצורים הבאים:

$\mathrm{S}(x)$ פירושו ש- x הוא סוציאליסט

$\mathrm{R}(x)$ פירושו ש- x אוהב את הצבע האדום

$\mathrm{L}(x)$ פירושו ש- x הוא אוהד של ליברפול

הטיעון של אוהד אברטון הוא:

$$\forall x(\mathrm{S}(x) \Rightarrow \mathrm{R}(x)) \quad , \quad \forall x(\mathrm{L}(x) \Rightarrow \mathrm{R}(x)) \;\vdash\; \forall x(\mathrm{L}(x) \Rightarrow \mathrm{S}(x))$$

בדיקת טיעון זה, כמו שהוא, בעזרת טבלאות אמת בלבד, אינה אפשרית, כיוון שהכמת האוניברסלי מעורב פה בצורה חזקה. אולם ניתן להראות (וזה ברור למדי באופן אינטואיטיבי), שאפשר כאן להתרכז בבן-אדם אחד (נקרא לו משה), לנסח את הנתונים והמסקנה ביחס אליו בלבד, והטיעון המקורי יהיה תקף אם ורק אם הטיעון ביחס למשה תקף. לאור זאת עלינו לבדוק אם:

$$(*) \quad S(\text{Moshe}) \Rightarrow R(\text{Moshe}) \ , \ L(\text{Moshe}) \Rightarrow R(\text{Moshe}) \vdash L(\text{Moshe}) \Rightarrow S(\text{Moshe})$$

לגבי טיעון זה ניתן להפעיל את שיטת טבלאות האמת, כיוון שהכמתים אינם מעורבים בו. טבלת אמת מלאה תכיל פה 8 שורות (ראה דוגמה 3), אולם די שנציין, כי אם ניתן ל- R(Moshe) את הערך t, ל- L(Moshe) את הערך t ול- S(Moshe) את הערך f, נקבל פירוש, שבו ההנחות ב- (*) נכונות אך המסקנה שקרית.

♦ דוגמה 3:

הראה ש- $\neg C, \neg A \Rightarrow B \, , A \Rightarrow B \ \vdash B \vee C$

נבדוק בעזרת טבלת אמת, המכסה את כל האפשרויות:

	A	B	C	$\neg C$	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \Rightarrow B$	$B \vee C$
	t	t	t	f	f	t	t	t
*	t	t	f	t	f	t	t	t
	t	f	t	f	f	f	t	t
	t	f	f	t	f	f	t	f
	f	t	t	f	t	t	t	t
*	f	t	f	t	t	t	t	t
	f	f	t	f	t	t	f	t
	f	f	f	t	t	t	f	f

בשתיים בדיוק משמונה השורות נכונות כל ההנחות (השנייה והשישית). בשתיהן נכונה גם המסקנה, ולכן היא אכן נובעת מההנחות.

הערה:

דוגמה זו מרמזת על חולשתה של השיטה גם באותם מקרים, בהם ניתן להפעיל אותה. כל תוספת של פסוק אטומי (כמו A, B ו- C בדוגמה זו) מכפילה גם את מספר השורות ולכן גם את העבודה הנדרשת. באופן מעשי, השיטה ישימה רק כשמספר קטן של נוסחאות אטומיות מעורב בטיעון.

א.3. שקילויות לוגיות

שתי נוסחאות נקראות ***שקולות לוגית***, אם בכל פירוש בו נכונה האחת, נכונה גם השנייה. שימוש בשקילויות לוגיות (דהיינו: בעובדה, שנוסחה מסוימת שקולה לוגית לנוסחה אחרת) היא אחת הדרכים היעילות ביותר לטיפול בטענות לצורך טיעונים (ולצרכים אחרים). צורת השימוש בהן דומה לצורת השימוש בזהויות באלגברה. באלגברה, אם יש זהות בין שני ביטויים (כמו $(a + b)^2$ ו- $a^2 + 2ab + b^2$), אזי ניתן להחליף כל אחד מהם בשני בכל קונטקסט אלגברי. עיקרון דומה, הנקרא "עיקרון החלפת אקוויוולנטים", קיים בלוגיקה:
אם שתי נוסחאות הינן שקולות לוגית (= אקוויוולנטיות), אזי ניתן להחליף כל אחת בשנייה בכל קונטקסט.[3]

קל לברר, ששתי נוסחאות A ו- B הן שקולות לוגית אם"ם הנוסחה $A \Leftrightarrow B$ היא אמת לוגית. לאמיתות לוגיות מסוג זה קוראים "שקילויות לוגיות".
טבלה מס' א.3 מרכזת רשימה של השקילויות הלוגיות החשובות ביותר. את כל אלה בהן הכמתים אינם מעורבים אפשר לאמת בקלות בעזרת טבלאות אמת: השקילות תקבל ערך t בכל פירוש של A, B ו- C על-ידי מתן ערכי אמת (במלים אחרות: שני אגפי השקילות יקבלו תמיד אותו ערך אמת). השאר ברורות מאליהן (אחרי שנבין לאשורו מה בדיוק כתוב בטבלה, דבר שנבהיר בהמשך לכל שקילות).

טבלה א.3: שקילויות לוגיות חשובות

קוניוקציה ודיסיונקציה

$(1)_a$	$A \wedge A \Leftrightarrow A$	$(1)_b$	$A \vee A \Leftrightarrow A$
$(2)_a$	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	$(2)_b$	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
$(3)_a$	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	$(3)_b$	$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
$(4)_a$	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$(4)_b$	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

גרירה

$(5)_a$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$	$(5)_b$	$(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow B)$
(6)	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$		
(7)	$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow (A \wedge B \Rightarrow C)$		
$(8)_a$	$(A \Rightarrow B \wedge C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$	$(8)_b$	$(A \vee B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$

[3] יש חוסר דיוק מסוים במלים "*בכל* קונטקסט", אך נוכל להתעלם כאן ממנו. נוסח מדויק ניתן בקורס בלוגיקה.

שלילה

		(9)	$\neg\neg A \Leftrightarrow A$
$(10)_a$	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	$(10)_b$	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
		(11)	$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$
$(12)_a$	$\neg\forall xA \Leftrightarrow \exists x \neg A$	$(12)_b$	$\neg\exists xA \Leftrightarrow \forall x \neg A$

כמתים

$(13)_a$	$\forall x(\forall yA) \Leftrightarrow \forall y(\forall xA)$	$(13)_b$	$\exists x(\exists yA) \Leftrightarrow \exists y(\exists xA)$
$(14)_a$	$\forall xA \Leftrightarrow \forall yA(y/x)$	$(14)_b$	$\exists xA \Leftrightarrow \exists yA(y/x)$
$(15)_a$	$\forall x(A \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$	$(15)_b$	$\exists x(A \vee B) \Leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$

שמונה השקילויות ($(1)_a$ – $(4)_b$) הן פשוטות מאוד, והשימוש בהן נעשה באופן אוטומטי. לכולן מקבילות (כמו שנראה) זהויות הקשורות בקבוצות ובאופרציות על קבוצות, וזה עיקר חשיבותן בקורס זה. נציין, עם זאת, שהשקילויות ב- (3) מאפשרות לנו לכתוב (למשל) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$, בלי לציין במפורש את מקום הסוגריים השונים.

לקבוצת השקילויות הבאה (של הגרירה) יש חשיבות רבה בהוכחות, כיוון שהיא משמשת בסיס לגישות אפשריות להוכחה. $(5)_b$, לדוגמה, משמשת בסיס לשיטה הבאה להוכחת דיסיונקציה $A \vee B$: להוכיח ש- B נובע מההנחה, ש- A אינו נכון. (6) מאפשרת להוכיח משפטים בעזרת שיטה הידועה כ"קונטרה-פוזיציה": במקום להוכיח ש- B נובע מ- A, מראים, שאם B לא נכון אז גם A לא נכון (לדוגמה, כדי להוכיח, שאם במשולש זווית $\prec B$ שווה לזווית $\prec C$, אז $AB = AC$, משתמשים ספרי לימוד רבים ב"דרך השלילה": הם מראים, שאם $AB \neq AC$, אז או שזווית $\prec B$ גדולה מ- $\prec C$ או להיפך, ובכל מקרה לא ייתכן אז, ש- $\prec B = \prec C$). לפי $(8)_a$, כדי להוכיח שקוניוקציה $B \wedge C$ נובעת מ- A, יש לבצע שני דברים באופן נפרד: להוכיח ש- B נובע מ- A, ולהוכיח ש- C נובע מ- A. לפי $(8)_b$, לעומת זאת, אם ברצוננו להראות, שטענה C נובעת מדיסיונקציה $A \vee B$, אז עלינו להראות, שהיא נובעת בנפרד מכל אחד משני חלקי הדיסיונקציה. לבסוף, שקילות (7) מאפשרת להחליף גרירה מקוננת (nested) בגרירה פשוטה יותר. בדרך-כלל עושים אנו שימוש בה באופן אוטומטי, מבלי לתת את הדעת, על מה אנו מסתמכים. ניקח לדוגמה את המשפט: "במשולש ישר זווית, אם אחת הזוויות שווה 30^0, אז הצלע מולה שווה לחצי היתר". מה שנטען לפי *ניסוח* המשפט הוא:

$$\forall A \forall B \forall C(\prec ACB = 90° \Rightarrow (\prec ABC = 30° \Rightarrow 2\overline{AC} = \overline{AB}))$$

ברם, בניסוח ה"נתון – צריך להוכיח" כותבים מיד:

נתון: $\measuredangle ACB = 90$
$\measuredangle ABC = 30$

צ"ל: $\overline{AC} = 2\overline{AB}$

במלים אחרות, מה שמוכיחים הוא בעצם:

$$\forall A \forall B \forall C(\measuredangle ACB = 90° \wedge \measuredangle ABC = 30° \Rightarrow \overline{AC} = 2\overline{AB}))$$

לקבוצה הבאה של שקילויות, אלה הקשורות בשלילה, חשיבות מיוחדת בפישוט טענות ובהוכחות. כללית, ככל שהנוסחאות הנשללות בעזרת קשר השלילה הן פשוטות יותר – כן עדיף. אידיאלית, כדאי שהוא יופיע (אם בכלל) רק לפני הנוסחאות האטומיות (ואז אפשר לעתים קרובות להיפטר ממנו כליל. למשל, במקום $\neg(a < b)$ אפשר לכתוב $a \geq b$, אם עוסקים במספרים הטבעיים או הממשיים). השקילויות (12)-(9) מאפשרות להשיג מטרה זו תמיד. כדוגמה פשוטה נחזור לדוגמה המרכזית מהפרק הראשון. שם הגענו, כזכור, לניסוח הקצר הבא של הטענה "למספר שלילי אין שורש":

$$\forall a < 0 \neg \exists b . b^2 = a \quad (8)$$

עתה, לפי כלל $(12)_b$, $\neg \exists b . b^2 = a$ שקול ל- $\forall b . \neg b^2 = a$. במקרה זה, במקום $\neg b^2 = a$ אפשר לכתוב $b^2 \neq a$.[4] וכך נקבל:

$$\forall a < 0 \ \forall b . b^2 \neq a \quad (9)$$

נוכל עתה לחזור, סוף-סוף, לבעיה של שלילת הטענה "למספר שלילי אין שורש", בה התחלנו את דיוננו בפרק הראשון. בעזרת ההצרנה ושקילויות השלילה נוכל לפתור בעיה זו בקלות ובאופן מכני: אם נתחיל משלילת (9), נקבל:

$$\neg \forall a < 0 \ \forall b . \neg(b^2 = a)$$
$$\Leftrightarrow \quad \exists a < 0 \ \neg \forall b . \neg(b^2 = a) \qquad \text{לפי } (12)_a$$
$$\Leftrightarrow \quad \exists a < 0 \ \exists b . \neg\neg(b^2 = a) \qquad \text{לפי } (12)_a$$
$$\Leftrightarrow \quad \exists a < 0 \ \exists b . \ b^2 = a \qquad \text{לפי שקילות מס' } (9)$$

ובעברית: קיים מספר שלילי, שיש לו שורש.

הערה: במקרה זה היינו מגיעים לזה ביתר קלות, אם היינו מתחילים ב- (8).

---

[4] זה נוהג מקובל למדי לכתוב $a\not{R}b$ במקום $\neg(aRb)$ (כש- R סימן יחס בינארי כמו $=$, $\in$ ועוד).

קוראים זהירים ישימו לב, שבדוגמה התיימרנו להשתמש (פעמיים) ב- $(12)_a$, אך למעשה $(12)_a$ מתייחס רק לנוסחאות מהצורה $\forall a...$ ולא לקיצורים כמו: $\forall a < 0...$. האם הדבר אכן לגיטימי? נבדוק זאת על-ידי שנפעיל את הכללים כמות שהם ל- (9), כשהוא כתוב בצורה מלאה. (9) הינו צורה מקוצרת ל-

$$\forall a(a < 0 \Rightarrow \forall b.\neg(b^2 = a))$$

לכן הפישוט המדויק נראה כך:

$\neg\forall a(a < 0 \Rightarrow \forall b.\neg(b^2 = a))$		
$\exists a.\neg(a < 0 \Rightarrow \forall b.\neg(b^2 = a))$	$\Leftrightarrow$	לפי $(12)_a$
$\exists a(a < 0 \wedge \neg\forall b.\neg(b^2 = a))$	$\Leftrightarrow$	לפי (11)
$\exists a(a < 0 \wedge \exists b.\neg\neg(b^2 = a))$	$\Leftrightarrow$	לפי $(12)_a$
$\exists a(a < 0 \wedge \exists b.\, b^2 = a)$	$\Leftrightarrow$	לפי (9)

אבל $\exists a < 0\ \ \exists b.\, b^2 = a$, שקיבלנו למעלה, אינו אלא כתיבה מקוצרת של מה שקיבלנו כאן! אנו רואים (וקל להוכיח זאת באופן כללי), שהקיצורים שהנהגנו (ודומים שנעשה בעתיד) של $\forall a(a < c \Rightarrow ...)$ ל- $\forall a < c(...)$ ושל $\exists b(b < c \wedge ...)$ ל- $\exists b < c\,(...)$, הם לא רק נוחים, אלא גם קוהרנטיים עם השקילויות הנוגעות לשלילה.

הקבוצה האחרונה של השקילויות בטבלת השקילויות עוסקת בכמתים. נקדיש לה עתה דיון קצר, כי אבחנות הקשורות במשתנים ובכמתים הן חשובות ביותר, והתעלמות מהן מהווה מקור בלתי נדלה של טעויות לוגיות.

ראשית נעיר, כי במקום "x" ו- "y" יכולים להופיע בכללים השונים משתנים אחרים כלשהם. כך, למשל, $\forall a(\forall z_1 A)$ ו- $\forall z_1(\forall a A)$ שקולים לפי כלל $(13)_a$. מעתה, אגב, נכתוב פשוט $\forall x\forall y A$ (או אפילו $\forall x,y A$) במקום $\forall x(\forall y A)$, כמו שאכן עשינו כבר באי-אלו דוגמאות קודמות.

שנית, בשקילויות (14) מופיע סימן הדורש הבהרה: $A(y/x)$ הכוונה היא לנוסחה המתקבלת מ- A על-ידי החלפת משתנה x במשתנה y.[5] לדוגמה, אם במקום x ו- y נשתמש ב- a וב- b, ובתור A ניקח את הנוסחה $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$, אזי לפי $(14)_a$ $\forall a((a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1)$ הינה שקולה לוגית ל- $\forall b((b + 1)^2 = b^2 + 2b + 1)$.

[5] למעשה, לא בכל מקום, אלא רק בכל מקום ב- A בו x מופיע *חופשי*. עניין זה יובהר בפרק א.5.

עקרון זה (ללא הכמתים בהתחלה) ידוע ומוכר לנו משכבר. למעשה, בתיכון אנו לא אומרים, ששתי הנוסחאות שקולות לוגית, אלא שמדובר ב*אותה נוסחה*. האמת היא, שאכן (14) מבטא עקרון כללי ביותר של זיהוי, שאינו חל רק על נוסחאות לוגיות. נלמד אותו בפרק א.5 (שם נקרא לו עקרון α).

חשוב לציין, שעל (14) חלה הגבלה, ש- y חייב להיות משתנה ***חדש***, שאינו מופיע כבר בנוסחה A. לדוגמה, אם ניקח את $\exists i \exists j. i+j=3$ ונחליף בה את i ב- j, נקבל את $\exists j \exists j. j+j=3$, שאינו אלא $\exists j. j+j=3$. הטענה המקורית נכונה במספרים הטבעיים, השנייה – שקרית. ברור לכן, שהן אינן שקולות לוגיות.

בנוגע לשקילויות האחרות בטבלה, חשוב אולי יותר לשים לב ולזכור, מה ***לא*** מופיע בה מאשר מה כן. נתבונן, לדוגמה, בכללים (15). דוגמה ל- $(15)_a$ היא העובדה הברורה, שהטענה "כל ילד אוהב לאכול גלידה וגם כל ילד אוהב לאכול שוקולד" שקולה לחלוטין לטענה ש"כל ילד אוהב לאכול גלידה וגם אוהב לאכול שוקולד". לעומת זאת, הטענה ש"כל סטודנט יצליח או ייכשל בבחינה" אינה שקולה לטענה, ש"כל סטודנט יצליח בבחינה, או כל סטודנט ייכשל בה". $\forall x(A \vee B)$ אינה שקולה לנוסחה $\forall xA \vee \forall xB$! (עם $\exists$ המצב הוא הפוך, כמובן).

אבחנה חשובה עוד יותר קשורה בשקילויות (13), שעוסקות ב***סדר*** של הכמתים. תמציתן היא, שלגבי כמתים ***זהים*** אין חשיבות לסדר. הטענות $\exists x \exists y. x>y$ ו- $\exists y \exists x. x>y$ שקולות לחלוטין זו לזו. בדומה, הטענה "כל אם וכל בת מדליקות נרות שבת" שקולה לחלוטין (מבחינה לוגית, לפחות) לטענה "כל בת וכל אם מדליקות נרות שבת".

המצב שונה באופן קיצוני, כשעוסקים בכמתים מסוגים שונים. כאן הסדר משנה ועוד איך. $\forall x \exists yA$ הוא דבר שונה (וחלש יותר) מ- $\exists y \forall xA$. לדוגמה, $\forall x \exists y. x<y$ נכון בטבעיים. $\exists y \forall x. x<y$ לא.

אי הבנת ההבדל בין $\exists y \forall xA$ ובין $\forall x \exists yA$ היוותה ומהווה גורם ראשון במעלה לשגיאות לוגיות, שאפילו גדולי המתמטיקאים נכשלו בהן בזמנם. מקור הקשיים בכך, שהשפה הטבעית אינה מבדילה כל-כך בין שני הניסוחים. אין, למשל, הבדל במשמעות בין "לכל אדם כוכב יש בשמיים" ובין "יש כוכב בשמיים לכל אדם". ההבנה, למה הכוונה, נעשית במסגרת השפה הטבעית לפי הקונטקסט. לדוגמה, פירוש משפט כמו "יש מישהו שיצר את כל הפסלים הללו" יכול להיות: "לכל הפסלים הללו יש אותו יוצר". בקונטקסט אחר (כמו, למשל, עת מבקרים באיי הפסחא ורואים את עשרות

הפסלים המסתוריים, שנמצאים שם) הפירוש יכול להיות, שהפסלים לא נוצרו יש מאין, אלא יש בני-אדם שיצרו אותם (אבל ייתכן, שלא כולם נוצרו על-ידי אותו פסל). מבחינה לוגית הפירוש הראשון גורר את השני – אך לא להיפך. במלים אחרות, $\exists y\forall xA \Rightarrow \forall x\exists yA$ נכון תמיד, אך $\forall x\exists yA \Rightarrow \exists y\forall xA$ בדרך-כלל לא.

%%

ההבדל בין $\exists y\forall xA$ ובין $\forall x\exists yA$ עומד ביסוד כמה מהמושגים החשובים והאבחנות העדינות של המתמטיקה. כל מושג באנליזה (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי) הכולל את צירוף המלים "במידה שווה" קשור בו. לדוגמה, ההבדל באנליזה בין רציפות סתם ובין רציפות במידה-שווה הינו, בעיקרו של דבר, הבא:[6]

להגיד ש-f רציפה בקטע I פירושו:

$$\forall x\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

מה ששקול לפי $(13)_a$ ל-

$$\forall \varepsilon > 0\, \underline{\forall x\, \exists \delta > 0}\, \forall y(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

לומר ש-f רציפה במידה-שווה ב-I פירושו, לעומת זאת:

$$\forall \varepsilon > 0\, \underline{\exists \delta > 0\, \forall x}\, \forall y(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

אנו רואים ש"כל" ההבדל (הבדל מהותי ביותר – שלא תהיה מקום לטעות!) הוא בסדר הכמתים. ליתר דיוק: בהחלפה, במקום אחד, של "$\forall x\exists\delta$" ב- "$\exists\delta\forall x$".

מוסר השכל הוא: בקוראנו ובנסחנו משפטים מתמטיים יש לשים לב לכל מלה ומלה, וגם לסדר המלים!

%%

6 ב- "$\forall x$" בשורות הבאות הכוונה "לכל x בקטע I". הסימון, המאפשר לומר זאת עם התייחסות לקטע I, יילמד בהמשך.

*4.א. כיצד מוכיחין?

למרות שלשיטת טבלאות האמת ולשימוש בשקילויות יש חשיבות, הרי הוכחות בטקסטים מתמטיים לעתים רחוקות נעזרות בהם. למעשה, הוכחות מתמטיות משתמשות במספר לא גדול של *כללי היסק*. כללי היסק אלו מסוכמים בטבלה מס' א.4. מטרתנו בפרק זה היא להבין, מה בדיוק כתוב בטבלה זו (ולהביא דוגמאות).

טבלה א.4: כללי ההיסק הבסיסיים

(1)	$\dfrac{\mathbf{T}, A \vdash B}{\mathbf{T} \vdash A \Rightarrow B}$	(2)	$\dfrac{\mathbf{T} \vdash A \quad T \vdash A \Rightarrow B}{\mathbf{T} \vdash B}$
(3)	$\dfrac{\mathbf{T} \vdash A \quad \mathbf{T} \vdash B}{\mathbf{T} \vdash A \wedge B}$	(4)	$\dfrac{\mathbf{T} \vdash A \wedge B}{\mathbf{T} \vdash A} \quad \dfrac{\mathbf{T} \vdash A \wedge B}{\mathbf{T} \vdash B}$
(5)	$\dfrac{\mathbf{T} \vdash A}{\mathbf{T} \vdash A \vee B} \quad \dfrac{\mathbf{T} \vdash B}{\mathbf{T} \vdash A \vee B}$	(6)	$\dfrac{\mathbf{T} \vdash A \vee B \quad \mathbf{T}, A \vdash C \quad \mathbf{T}, B \vdash C}{\mathbf{T} \vdash C}$
(7)	$\vdash \neg A \vee A$	(8)	$\dfrac{\mathbf{T} \vdash \neg A \quad \mathbf{T} \vdash A \vee B}{\mathbf{T} \vdash B}$
(9)	$\dfrac{\mathbf{T}, A \vdash B \quad \mathbf{T}, A \vdash \neg B}{\mathbf{T} \vdash \neg A}$	(10)	$\dfrac{\mathbf{T}, \neg A \vdash B \quad \mathbf{T}, \neg A \vdash \neg B}{\mathbf{T} \vdash A}$
(11)	$\dfrac{\mathbf{T} \vdash A \Rightarrow B \quad \mathbf{T} \vdash B \Rightarrow A}{\mathbf{T} \vdash A \Leftrightarrow B}$	(12)	$\dfrac{\mathbf{T} \vdash A \Leftrightarrow B}{\mathbf{T} \vdash A \Rightarrow B} \quad \dfrac{\mathbf{T} \vdash A \Leftrightarrow B}{\mathbf{T} \vdash B \Rightarrow A}$
(13)*	$\dfrac{\mathbf{T} \vdash A(y/x)}{\mathbf{T} \vdash \forall x A}$	(14)**	$\dfrac{\mathbf{T} \vdash \forall x A}{\mathbf{T} \vdash A(t/x)}$
(15)**	$\dfrac{\mathbf{T} \vdash A(t/x)}{\mathbf{T} \vdash \exists x A}$	(16)*	$\dfrac{\mathbf{T} \vdash \exists x A \quad \mathbf{T}, A(y/x) \vdash B}{\mathbf{T} \vdash B}$

כשאנו קוראים הוכחה מתמטית, אנו קוראים סדרה של טענות. כל אחת ואחת מהן מוכחת (בשלב בו היא נטענת) על סמך קבוצה כלשהי של הנחות.[7] קבוצה זו מורכבת מהאקסיומות הכלליות של התחום הנדון (כמו אקסיומות הגיאומטריה, כשמדובר בהוכחה גיאומטרית), הנתונים המיוחדים של המשפט המוכח והנחות זמניות, שאנו עושים במהלך ההוכחה. לכן מה שמוכח בכל שלב אינו בעצם הטענה הכתובה, אלא העובדה, שהיא נובעת מקבוצה מסוימת של הנחות, הנמצאות ברקע שלה. כללי ההיסק, בעזרתם אנו עוברים מטענות שכבר הוכחו לטענה חדשה, אומרים בעצם משהו מהצורה הבאה: "אם הטענה A_1 נובעת מקבוצת ההנחות $\mathbf{T}_1$, A_2 נובעת מקבוצת ההנחות $\mathbf{T}_2$, ... , A_n נובעת מקבוצת ההנחות $\mathbf{T}_n$, אז B נובעת מקבוצת ההנחות $\mathbf{T}$". כללי ההיסק בטבלה א.4 מבטאים זאת בדיוק. מה שמעל "קו השבר" בכל אחד מהם מבטא את חלק ה"אם" האמור לעיל ("אם טענה A_1..."), בעוד מה שמתחתיו את חלק ה"אז" ("אז B נובעת ..."). הדוגמאות, שתבואנה מיד, תבהרנה, למה בדיוק הכוונה.

בעת שמשתמשים בכללי ההיסק יש לזכור, ראשית, שכל טענה נובעת מעצמה. כמו כן, אם טענה נובעת מקבוצה מסוימת של הנחות, אזי היא נובעת מכל קבוצה רחבה יותר של הנחות. הסימון "$\mathbf{T}, A \vdash B$" משמעותו, שהטענה B נובעת מההנחות ב- $\mathbf{T}$ בתוספת עם ההנחה A.

כללי ההיסק הנהוגים בהוכחות מתחלקים לשני סוגים:

א. כללים, שבעזרתם מוכיחים טענות מהסוג $A \Rightarrow B$, $A \wedge B$ וכו'. לכללים כאלה קוראים "כללי הכנסה".

ב. כללים, שבעזרתם משתמשים בידע מהצורה $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$ וכו'. לכללים כאלה קוראים "כללי סילוק".

נעבור עתה על הכללים בטבלה, ונסביר אותם.

(I) כללי הגרירה

הכלל הברור והמובן מאליו הקשור בגרירה (ובכלל) הוא כלל (2) הידוע בשם "מודוס פוננס" (MP). הוא אומר פשוט, שאם ידוע ש- B נובע מ- A, וידוע A,

[7] אפשרי, אם כי נדיר ביותר, שטענה מוכחת ללא כל הנחות ברקע. במקרה זה נאמר בהמשך, שקבוצת ההנחות $\mathbf{T}$ הינה "ריקה".

אז ניתן להסיק את B. זוהי דוגמה לכלל סילוק: זהו כלל, בעזרתו אנו משתמשים בידע מהצורה $A \Rightarrow B$.

ואיך מוכיחים גרירה מהצורה $A \Rightarrow B$ על סמך קבוצת הנחות $\mathbf{T}$? ובכן, לפי כלל מס׳ (1), כל שעלינו לעשות לצורך זאת, הוא לצרף את A למערכת ההנחות $\mathbf{T}$ ולהוכיח את B על סמך אוסף ההנחות המורחב. אם נצליח (כלומר, אם נראה ש- $\mathbf{T}, A \vdash B$) נוכל להסיק מזה ש- $A \Rightarrow B$ נובע מ- $\mathbf{T}$ ($\mathbf{T} \vdash A \Rightarrow B$). לדוגמה, נניח שברצוננו להראות, שמאקסיומות הגיאומטריה נובע, שאם במשולש יש שתי זוויות שוות, אז הוא שווה-שוקיים. ברצוננו להראות, אפוא, ש- $\mathbf{T} \vdash A \Rightarrow B$, כאשר $\mathbf{T}$ היא קבוצת האקסיומות של הגיאומטריה, A היא הטענה, שבמשולש ABC יש שתי זוויות שוות, ו- B – שמשולש זה הוא שווה-שוקיים. כיצד נעשה דבר זה בפועל בבית-הספר התיכון? ובכן, ראשית חכמה רושמים:

נתון: $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$

צ״ל: $AB = AC$

כלומר: מוסיפים את ההנחה ש- $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$ לאקסיומות של הגיאומטריה, ומשתדלים להוכיח ש- $AB = AC$ על סמך האוסף המתקבל. במלים אחרות: מוכיחים ש- $\mathbf{T}, A \vdash B$ (עם אותם $\mathbf{T}$, A, B). זהו שימוש מובהק, הנעשה באופן אוטומטי, בכלל (1) – כלל ההכנסה של הגרירה.

בעזרת שני הכללים הבסיסיים של הגרירה אפשר לגזור עוד הרבה כללים שימושיים אחרים. נראה לדוגמה כלל חשוב במיוחד: שאם A גורר את B ו- B גורר את C אז A גורר את C:

(i) $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C,\ A \vdash A \Rightarrow B$ (עיקרון בסיסי)

(ii) $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C,\ A \vdash B \Rightarrow C$ (עיקרון בסיסי)

(iii) $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C,\ A \vdash A$ (עיקרון בסיסי)

(iv) $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C,\ A \vdash B$ ((i), (iii) וכלל (2))

(v) $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C,\ A \vdash C$ ((ii), (iv) וכלל (2))

(vi) $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$ ((v) וכלל (1))

חשוב לציין, שבטקסטים אמיתיים לעולם לא יהיה פירוט כזה. ראשית, אין מציינים בכל שורה ושורה את מערכת ההנחות, ממנה הוסקה הטענה, הנמצאת באותה שורה. על הקורא לעקוב אחרי זה בעצמו. שנית, לא מציינים, איזה

כללים לוגיים מפעילים והיכן. פשוט משתמשים בהם. הוכחה כנ"ל בטקסט מתמטי אמיתי דומה יותר לדבר הבא:

(i) $A \Rightarrow B$ (הנחה)

(ii) $B \Rightarrow C$ (הנחה)

(iii) A (הנחה)

(iv) B (מ- (i) ו- (iii))

(v) C (מ- (ii) ו- (iv))

כדאי לשים לב, שאין טורחים כלל לעשות את המעבר המפורש מ- (v) ל- (vi). הקורא אמור להבין בעצמו, שכאן הוכח $A \Rightarrow C$ על סמך ההנחות $A \Rightarrow B$ ו- $B \Rightarrow C$!

(II) כללי הקוניוקציה

אלה הכללים הפשוטים ביותר, ולא נבזבז עליהם מלים מיותרות. כלל (3) קובע, שכדי להוכיח קוניוקציה $A \wedge B$, עלינו לספק שתי הוכחות: אחת ל- A, השנייה ל- B. הכללים ב- (4), לעומתם, אומרים, שפיסת ידע מהצורה $A \wedge B$ כמוה כשתי פיסות ידע, A ו- B.

◆ **דוגמה:**

נתבונן במשפט "חוצה זווית הראש במשולש שווה-שוקיים הוא גם גובה וגם תיכון". זוהי טענה מהצורה $\underline{A} \wedge \underline{B} \Rightarrow \underline{C} \wedge \underline{D}$, כאשר $\underline{A}$ היא הטענה, שמשולש ABC הוא שווה-שוקיים, $\underline{B}$ – הטענה ש- AD הוא חוצה זווית הראש, $\underline{C}$ קובעת ש- AD מאונך לבסיס, ו- $\underline{D}$ – ש- AD הוא תיכון. כמו בכל גרירה, מניחים בהוכחה את $\underline{A} \wedge \underline{B}$ ומוכיחים את $\underline{C} \wedge \underline{D}$. עתה את הנתון $\underline{A} \wedge \underline{B}$ מפרקים אוטומטית, לפי (4), לנתונים $\underline{A}$ ו- $\underline{B}$. גם את מה שצריך להוכיח מפרקים אוטומטית, הפעם לפי (3), לשתי מטלות: להוכיח את $\underline{C}$ ולהוכיח את $\underline{D}$. מה שכותבים הוא לכן:

נתון: (1) $AB = AC$ (2) $\measuredangle BAD = \measuredangle CAD$

צ"ל: (1) $AD \perp BC$ (2) $BD = DC$

(III) כללי הדיסיונקציה

השיטה הישירה, הקונסטרוקטיבית, להראות ש- $A \vee B$ נכון, ניתנת על-ידי כלל (5): פשוט מוכיחים, שאחת משתי האלטרנטיבות (A ו- B) נכונה היא. ברם: אין

זו תמיד הדרך היחידה. לפעמים אפשר לדעת $A \vee B$ בלי לדעת, מי משתי הברירות היא הנכונה. מקרה בסיסי כזה ניתן על-ידי כלל (7), הידוע בשם "חוק השלישי הנמנע". לפי כלל זה, כל טענה היא או נכונה או לא. כך כל סטודנט יודע, שאו שהוא יצליח בבחינה, או שלא. לא כל סטודנט בטוח, עם זאת, מי משתי האלטרנטיבות תתגשם!

ואיך משתמשים בידע מהצורה $A \vee B$? יש שתי דרכים עיקריות לכך. האחת, הקונסטרוקטיבית, ניתנת על-ידי כלל (6) (הידוע כ"כלל הדילמה"): כדי להראות ש- C נכון, כשכל שידוע הוא $A \vee B$, עלינו להראות, שכל אחת משתי האלטרנטיבות לחוד מובילה למסקנה C. למשל, אם בגמר גביע המדינה בכדורגל מתמודדות הפועל תל-אביב ומכבי תל-אביב, אז בהרבה מוספי ספורט יכתבו לפני המשחק: "בכל מקרה הגביע יגיע לתל-אביב". ההגיון הוא, שאו שהפועל תל-אביב תזכה, או שמכבי תל-אביב תזכה. אם הפועל תל-אביב תזכה – הגביע יגיע לתל-אביב. אם מכבי תל-אביב תזכה – גם אז הגביע יגיע לתל-אביב. מכאן, שבכל מקרה הגביע יגיע לתל-אביב.

השיטה השנייה לשימוש בדיסיונקציה היא השיטה, הניתנת על-ידי כלל (8) (הנקרא, כזכור, "הסילוגיזם הדיסיונקטיבי"). היא מקובלת, בין היתר, על בלשים, שעורכים רשימת חשודים ואחר-כך מתחילים לצמצם אותה ("או ששמעון הוא הרוצח, או שזה לוי. לשמעון יש אליבי מוצק. מכאן שהרוצח הוא לוי").

(IV) כללי השלילה

כלל (9) נותן את הדרך העיקרית להוכחת שלילות: כדי להראות ש- A אינו נכון, מראים, שמ- A נובעת סתירה. אפשרות אחרת, כמובן, היא להוכיח משהו, שהינו שקול לשלילת A על-סמך השקילויות, שנלמדו בפרק הקודם.

ואיך משתמשים בידע מהצורה $\neg A$? דרך מרכזית, שכבר ראינו אותה, ניתנה על-ידי כלל מס' (8). אפשרות אחרת היא, שוב, להשתמש בשקילויות של הפרק הקודם.

כדאי לציין, שאת כל השקילויות, שלמדנו בפרק הקודם ניתן להוכיח בעזרת הכללים של טבלה א.4. כדוגמה חשובה במיוחד ניקח את ההסקה של A מ- $\neg\neg A$. גזירתה פשוטה בתכלית: מ- $\neg\neg A$ ו- $A \vee \neg A$ (כלל (7)) נובע A לפי כלל (8)! עתה, האפשרות של הסקת A מ- $\neg\neg A$ היא חשובה במיוחד, כי היא משמשת בסיס להוכחות בדרך השלילה. בהוכחות כאלה, כאשר רוצים להוכיח A, מניחים $\neg A$ ומגיעים לסתירה. מזה נובע, לפי כלל (9), $\neg\neg A$, וממנו נובע, כאמור, A.

התהליך כולו מסוכם בטבלה א.4 ככלל בפני עצמו: כלל (10) (למרות שכלל זה נובע, כאמור, משאר הכללים בטבלה, בחרנו לכלול אותו בה בגלל חשיבותו).

(V) כללי השקילות

$A \Leftrightarrow B$ שקול ל- $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, ולכן הכללים הקשורים ב- $\Leftrightarrow$ ב- (11) וב-(12) נגזרים ישירות מכללי הגרירה והקוניוקציה. נזכיר עוד את כלל הצבת האקויולנטים, שהוא דרך מרכזית להשתמש בשקילויות. כמו כן כדאי להדגיש, שלפי כלל (11), על מנת להוכיח את שקילותם של A ו- B, יש להראות *שני* דברים: ש- A גורר את B, וש- B גורר את A.

(VI) כללי $\forall$

הדרך הרגילה להוכיח טענה אוניברסלית מהסוג $\forall xA$ היא לקחת איבר "כלשהו" x בתחום הנדון, ששום דבר לא ידוע עליו, וגם לא הנחנו עליו דבר עד אותו רגע, ולהוכיח, שיש לו התכונה A. אין שום הכרח, אגב, לקרוא לו x דווקא. כל שם אחר אפשרי, ובלבד שלשם זה אין כבר פירוש, ועל העצם, שהשם מתייחס אליו, לא הונח דבר עד אותו רגע. צורת הוכחה זו היא המתוארת בכלל מספר (13) (ה"כוכבית" הצמודה למספר "13" באה לציין קיום הגבלות על y. ניסוחן המדויק של ההגבלות הללו יינתן בפרק הבא).

הבה נביא דוגמאות.

דוגמה ראשונה מתחום הגיאומטריה: נניח שאנו רוצים להוכיח, כי בכל משולש שווה-שוקיים שוות זוויות הבסיס. משפט זה מדבר על *כל* משולש. למרות זאת, בהוכחה עצמה אנו מתייחסים למשולש ABC, שהוא, כביכול, ספציפי, ואפילו משרטטים אותו בדרך-כלל. כמובן, ידוע לנו היטב, שבמהלך ההוכחה אין להשתמש בשום תכונה, שיש למשולש הספציפי ששרטטנו (כמו היות זווית הראש שלו חדה, או אולי קהה). משולש זה אמור לייצג משולש *כלשהו*. כיוון שכך, ההוכחה לגביו תופסת לגבי כל משולש שהוא. ניתן לתאר זאת בצורה טובה שונה באופן הבא: כיוון שאין אנו מתייחסים בהוכחתנו לשום תכונה של המשולש, אתו אנו עובדים (פרט להיותו שווה-שוקיים), ניתן לשחזר את ההוכחה לגביו עבור כל משולש שווה-שוקיים אחר. לכן ההוכחה לגביו כמוה כהוכחה לכל משולש שווה-שוקיים.

דוגמה שנייה: נניח שרוצים להוכיח, שאם נעלה מספר טבעי אי-זוגי בריבוע ונחלק את התוצאה ב- 4, נקבל שארית 1. המלה "לכל" אינה מופיעה אמנם

בניסוח, אך הטענה היא בכל זאת אוניברסלית. ניסוח סטנדרטי של ההוכחה ייראה כך: יהי n מספר אי-זוגי. אז יש k כך ש- $n = 2k + 1$. לכן:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

מכאן, שאם נחלק את n^2 ב- 4 נקבל מנה $k^2 + k$ ושארית 1. מש"ל.

השימוש בכלל (13) בדוגמה זו מסתתר במלים, בהן נפתחת ההוכחה: "יהי n מספר אי-זוגי". הרעיון: אנו רוצים להראות משהו עבור *כל* מספר אי-זוגי. לכן אנו לוקחים מספר כלשהו כזה, n (שכל מה שאנו מניחים לגביו הוא, שהינו אי-זוגי), ומוכיחים את הטענה לגביו. כיוון ש- n היה כלשהו, מסקנתנו (שאיננו טורחים אפילו לכתוב אותה במפורש) היא, שהטענה נכונה עבור כל מספר אי-זוגי. זהו בדיוק שימוש בכלל (13).

כדאי לשים לב, שהפתיחה "יהי x..." היא פתיחה אופיינית להוכחת משפטים אוניברסליים מהצורה $\forall xA$, והיא סימן לכך, שאנו עומדים להשתמש בכלל (13).

לבסוף, דוגמה לשיטת הוכחה של טענות מהצורה: "לכל מספר טבעי..." (כלומר: טענות מהצורה $(\forall nA(n))$, בה אין משתמשים בכלל (13) באופן ישיר: האינדוקציה המתמטית. בשיטה זו מסתמכים על האקסיומה הבאה:

$$[A(0/n) \wedge \forall n(A(n) \Rightarrow A(n + 1/n))] \Rightarrow \forall nA(n)$$

לפי אקסיומה זו (הידועה כ"אקסיומת האינדוקציה"), מספיק, לפי כלל (2), להוכיח את הרישא: $A(0/n) \wedge \forall n(A(n) \Rightarrow A(n + 1/n))$. עבור זה צריך, לפי כלל (3), להוכיח את $A(0/n)$ (מה שנקרא "בסיס האינדוקציה") ואת $\forall n(A(n) \Rightarrow A(n + 1/n))$ (מה שנקרא "שלב המעבר"). עתה, את שלב המעבר ***כן*** מוכיחים לפי כלל (13)! במלים אחרות: לוקחים n כלשהו ומוכיחים $A(n) \Rightarrow A(n + 1/n)$. כרגיל, עם גרירות, בשביל זה אנו מניחים ש- $A(n)$ נכון, ומוכיחים על סמך הנחה זו, ש- $A(n + 1/n)$ נכון. חשוב לציין, שבניגוד למה שנדמה לפעמים, ***אין*** אנו מניחים פה את מה שאנו רוצים להוכיח. מה שאנו רוצים להוכיח הוא $\forall nA(n)$, ואילו מה שאנו מניחים באותו שלב בהוכחה, הוא רק $A(n)$ לאיזה n לא ידוע. זה שונה מאוד מלהניח, ***שלכל*** n יש התכונה A!

וכיצד משתמשים בידע מהצורה $\forall xA$? התשובה: על-ידי יישומו למקרים פרטיים. זהו תוכן כלל (14). הוא קובע, שאם ידוע $\forall xA$, אז ניתן להסיק, בהינתן עצם ספציפי t, שיש לו התכונה A. במלים אחרות: ניתן להציב ב- A את t במקום x, ומה שמתקבל הוא מסקנה מהידוע. לדוגמה: אם ידוע ש- $\forall a((a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1)$, אז ניתן להסיק מזה ש- $(7 + 1)^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 + 1$ (כשמציבים $t = 7$) וגם ש- $(2a + 1)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot (2a) + 1$ (כשמציבים $t = 2a$).

גם כאן מרמזות שתי הכוכביות ליד המספר (14), שיש הגבלה בנוגע לשמות העצם t, שניתן להציב כאן במקום x. הסבר הגבלה זו יינתן בפרק הבא.

(VII) כללי $\exists$

הוכחה ישירה, קונסטרוקטיבית, לכך, שמשהו בעל תכונה מסוימת קיים ($\exists xA$) היא על-ידי מתן דוגמה קונקרטית. למשל: מהעובדה ש- $1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$ נובע, שלמשוואה $x^3 - 3x + 2 = 0$ יש פתרון (כלומר: $\exists x.x^3 - 3x + 2 = 0$). זהו תוכנו של כלל (15). שתי הכוכביות לידו מרמזות שוב על הגבלה, שתוסבר בפרק הבא.

חשוב לציין, שלמרות ששימוש בכלל (15) להוכחת קיום משהו היא הדרך הישרה (והעדיפה, אם אפשר), אין זו הדרך היחידה. אפשרות אחרת היא ללכת בדרך השלילה, דהיינו: להניח, שלא קיים עצם כמבוקש (כלומר: $\neg\exists xA$, מה ששקול ל- $\forall x\neg A$, כלומר: שלכל x אין התכונה A) ולהגיע לסתירה. דרך זו עלולה שלא לתת רמז, איך למצוא בפועל x בעל התכונה A.

ואיך משתמשים בידע מהצורה $\exists xA$? ובכן, בדרך-כלל מה שעושים, אחרי שהראינו זאת, הוא לקחת משתנה y (לעתים קרובות, אך לא תמיד, זהו x עצמו), עליו לא הונח דבר עד אותו רגע, ולהוסיף לרשימת ההנחות את ההנחה, ש- y מייצג משהו בעל התכונה A ($A(y/x)$). כלל (16) קובע אז, שאם B נובע מאוסף ההנחות המורחב, אז הוא נובע גם מהאוסף המקורי. גם כאן יש הגבלות מסוימות, ואלה תוסברנה בסעיף הבא.

השימוש בכלל (16) נעשה בדרך-כלל באופן מוסווה למדי, ובאופן כה טבעי, עד כי קשה להרגיש, שאכן נעשה בו שימוש. (16) הוא מסוג הכללים, שבדרך-כלל קל הרבה יותר להשתמש בהם, מאשר להבין את ניסוחם!

נביא עתה דוגמה מפורטת להוכחה מתמטית אופיינית. בהוכחה זו נעשה שימוש בחלק ניכר מהכללים, כולל כלל (16). אני מקווה, שהכלל והשימוש בו יובנו אז טוב יותר.

%%

◆ דוגמה:

נניח שידוע, שאת המספר π (שאינו רציונלי) אפשר לקרב קירוב טוב כרצוננו על-ידי מספרים רציונליים, כלומר: שלכל ε חיובי אפשר למצוא מספר רציונלי, שמרחקו מ- π קטן מ- ε. נניח עוד, שגם ל- $\sqrt{2}$ (שאף הוא אינו רציונלי) יש אותה התכונה. צריך להוכיח על סמך זה, שגם לסכומם, $\pi + \sqrt{2}$, יש אותה התכונה.

הוכחת טענה זו בטקסט מתמטי אופייני תיראה כך: "יהי $\varepsilon > 0$. מהנתון על π נובע, שיש a_1 רציונלי כך ש- $|\pi - a_1| < \frac{\varepsilon}{2}$. מהנתון על $\sqrt{2}$ נובע, שיש a_2 רציונלי כך ש- $\left|\sqrt{2} - a_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. עתה $a_1 + a_2$ הינו רציונלי, ומתקיים:

$$\left|(\pi + \sqrt{2}) - (a_1 + a_2)\right| = \left|(\pi - a_1) + (\sqrt{2} - a_2)\right| \leq |\pi - a_1| + \left|\sqrt{2} - a_2\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

מכאן ש- $a_1 + a_2$ מספר כמבוקש".

כדאי לשים לב, שכדי להבין את ההוכחה אין שום צורך לדעת מה זה, בעצם, "מספר רציונלי". כל מה שצריך לדעת הוא, שאם נחבר שני מספרים רציונליים, נקבל מספר רציונלי. מלבד זאת דרוש רק ידע בסיסי ביותר על חיבור, חיסור, $\leq$ וערך מוחלט (בעיקר "אי שוויון המשולש").

נעבור עתה לניתוח לעומק של ההוכחה הקצרה למעלה ונראה, באילו כללים השתמשנו בה והיכן. נתחיל בניסוח פורמלי מדויק של מה שצריך להוכיח ושל הנתונים (פרט לאלו הקשורים בידע האריתמטי הבסיסי הנחוץ, ומהווים את האקסיומות שברקע).

נתון:

(1) $\forall\varepsilon > 0\exists a(\text{Rational }(a) \wedge |\pi - a| < \varepsilon)$

(2) $\forall\varepsilon > 0\exists a(\text{Rational }(a) \wedge |\sqrt{2} - a| < \varepsilon)$

(3) $\forall a\, \forall b(\text{Rational }(a) \wedge \text{Rational }(b) \Rightarrow \text{Rational }(a + b))$

צ"ל:

$$\forall\varepsilon > 0\exists a(\text{Rational }(a) \wedge |(\pi + \sqrt{2}) - a| < \varepsilon)$$

אם נתבונן במה שצריך להוכיח, נראה, שמדובר במשפט אוניברסלי, המתחיל ב- "$\forall\varepsilon > 0\ldots$". משפט אוניברסלי, כאמור למעלה, מוכיחים בדרך-כלל בעזרת כלל (13) (כלל ההכנסה של "$\forall$"). המלים המאפיינות שימוש בכלל זה הן "יהי $\varepsilon > 0$". פירושן הוא, שאנו לוקחים ε חיובי כלשהו, ומוכיחים לגביו ש-

$$\exists a(\text{Rational }(a) \wedge |(\pi + \sqrt{2}) - a| < \varepsilon)\ .$$

אם נצליח, הרי נוכל להסיק מזאת את המבוקש על-ידי הפעלת כלל (13) *בסוף* ההוכחה.

למעשה, הפתיחה "יהי $\varepsilon > 0$" טומנת בחובה רמז לשימוש *בשני* כללים בסוף ההוכחה. "$\forall\varepsilon > 0\ldots$" הינו, כזכור, קיצור של "$\forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \Rightarrow \cdots)$". כדי להסיק את מה שצריך להוכיח על סמך כלל (13), יש, למעשה, לקחת ε "כלשהו" ולהסיק עבורו גרירה: שאם

ε זה גדול מאפס, אז ... . הוכחת גרירה, מצדה, נעשית כמעט תמיד על-ידי שימוש בכלל (1). בהוכחה לעיל משמעותו היא, שאנו מצרפים לנתונים (3)-(1) את ההנחה (הזמנית) הבאה:

$$(4) \qquad \varepsilon > 0$$

בהמשך אנו מוכיחים את $\exists a(\text{Rational }(a) \wedge |(\pi + \sqrt{2}) - a| < \varepsilon)$ על סמך (4)-(1). מזה נקבל, על סמך כלל (1), ש- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists a(\ldots)$ נובע מ- (3)-(1) (בלבד!), ומזה נסיק, בעזרת כלל (13), שמה שצריך להוכיח אכן נובע מהנתונים (3)-(1).

אם נסכם: הפתיחה "יהי $\varepsilon > 0$" מציינת שימוש בכללים (1) ו- (13) (בסדר זה) ***בסוף***. העובדה, שאנו משתמשים בסוף בכללים אלה, לא מתוארת במפורש, אלא על הקורא להבין זאת בעצמו!

בשורה הבאה, בהוכחה בעברית למעלה, מצוין, כי אנו מסיקים משהו ממה שנתון על π, כלומר מנתון (1). נתון זה הוא שוב משפט אוניברסלי מהצורה $\forall\varepsilon(\ldots)$. שימוש בנתון כזה נעשה בדרך-כלל על סמך כלל (14) – כלל הסילוק של $\forall$. במקרה שלפנינו מופיע המשתנה "ε" במקום המשתנה "x", שמופיע בניסוח כלל (14), ושם העצם t, לגביו אנו מיישמים את הכלל, הוא $t = \frac{\varepsilon}{2}$. אנו מקבלים אז מהנתון (1), הלא הוא:

$$\forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists a(\text{Rational }(a) \wedge |\pi - a| < \varepsilon))$$

את:

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0 \Rightarrow \exists a(\text{Rational }(a) \wedge |\pi - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

בשלב זה יש מספר צעדים הנעשים באופן אוטומטי, וכלל לא מוזכרים בהוכחה. כך ידוע באופן כללי, ש- $\forall x(x > 0 \Rightarrow \frac{x}{2} > 0)$. מזה ומכלל (14) (הפעם עם $t = \varepsilon$) נקבל $\varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} > 0$. מזה ומההנחה (4) נובע $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, ויחד עם המסקנה הקודמת מקבלים (בעזרת MP):

$$(\mathrm{I}) \qquad \exists a(\text{Rational }(a) \wedge |\pi - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

המסקנה, שהגענו אליה זה עתה, היא טענה אקזיסטנציאלית ($\exists a(\ldots)$). שימוש במסקנה זו נעשה כמעט תמיד בעזרת כלל (16) – כלל הסילוק של $\exists$: ברגע שהוכחנו, שקיים "a" בעל תכונה מסוימת, אנו נותנים ***שם*** ל- "a" כזה. השם צריך להיות שונה מכל שם, שנעשה בו שימוש עד שלב זה. בהוכחה כאן הוא לא יכול לכן להיות π או ε. שמות אלו תפוסים. הוא כן יכול להיות a עצמו (שעדיין לא משמש כשם לשום דבר

ספציפי!) – ובדרך-כלל זה אכן מה שעושים. בניסות ההוכחה בעברית למעלה נבחר אבל שם אחר: a_1 (הסיבה תובהר בהמשך). אחרי בחירת השם מתווספת לרשימת ההנחות הנחה נוספת, המתקבלת מ"זריקת" $\exists a$ שבראש (I) למעלה, והצבת a_1 במקום a במה שנותר:

$$(5) \qquad \text{Rational}\ (a_1) \wedge |\pi - a_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

חשוב לציין, ש- (5) ***אינו*** מסקנה לוגית של (I). הוא ***הנחה*** חדשה. כלל (16) מבטיח אבל, כי טענה, שנוכיח בעזרת הנחה זו, נובעת גם מ- (I) – בתנאי שאינה מזכירה את a_1. אנו נשתדל לכן מעתה להוכיח את $\exists a(\text{Rational}\ (a) \wedge |(\pi + \sqrt{2}) - a)| < \varepsilon)$ על סמך (5)-(1). אם נצליח, הרי מכלל (16) ינבע, שטענה זו נובעת בעצם מ- (4)-(1) בלבד, כמבוקש. גם כאן אין כל זאת מוסבר בגוף ההוכחה. כמו במקרים קודמים, העובדה, שנעשה שימוש בכלל (16) בשלב מאוחר, מובלעת במלים "קיים a_1 כך ש...".

בשלב הבא בהוכחה המקורית (המשפט השלישי בה!) חוזרים על אותה צורת חשיבה כמו בשלב הקודם, אלא שבמקום בנתון (1) משתמשים בנתון (2). הפעם מקבלים:

$$(\text{II}) \qquad \exists a(\text{Rational}\ (a) \wedge |\sqrt{2} - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

בנקודה זו עושים שוב הכנה לשימוש בכלל (16) על-ידי בחירת שם מתאים עבור אותו "a", שקיומו מובטח ב- (II). השם "a_1" תפוס עתה – כבר נעשה בו שימוש. אי לכך בוחרים שם חדש – "a_2" במקרה זה. עתה מוסיפים לרשימת ההנחות את ההנחה של- a_2 התכונה המתוארת ב- (II):

$$(6) \qquad \text{Rational}\ (a_2) \wedge |\sqrt{2} - a_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

את המסקנה המבוקשת ננסה עתה להוכיח על סמך (6)-(1).

הערה:
אילו בשלב הקודם היינו עושים שימוש בשם "a" עצמו ולא ב- "a_1", היינו חייבים בכל מקרה לבחור כאן שם אחר, כמו b, או a'. בחירת השמות a_1 ו- a_2 מרמזת על קשר לנתונים (1) ו- (2) (בהתאמה), ויש לה כאן לכן עדיפות ***פסיכולוגית***.

המשפט הבא, הרביעי במספר, בהוכחה בעברית, הוא: "עתה, $a_1 + a_2$ הינו רציונלי". עובדה זו מוסקת מ- (3), (5) ו- (6) באופן הבא: מנתון (3) מסיקים, על-ידי שני שימושים בכלל (14):

$$\text{(III)} \qquad \text{Rational}\ (a_1) \wedge \text{Rational}\ (a_2) \Rightarrow \text{Rational}\ (a_1 + a_2)$$

מצד שני, מ- (5) נובע, בעזרת כלל (4), $\text{Rational}\ (a_1)$, בעוד מ- (6) נובע, שוב בעזרת כלל (4), $\text{Rational}\ (a_2)$. משני אלה נקבל באמצעות כלל (3):

$$\text{(IV)} \qquad \text{Rational}\ (a_1) \wedge \text{Rational}\ (a_2)$$

מ- (III) ו- (IV) אפשר להסיק מיידית בעזרת MP (כלל (2)) את $\text{Rational}\ (a_1 + a_2)$. זהו בדיוק תוכן המשפט הרביעי בהוכחה בעברית. ראוי לציין, שכדי לקבל אותו יש צורך בשישה צעדים לוגיים! זהו מצב אופייני. פירוט מלא של כל הצעדים הלוגיים היה הופך כל הוכחה פשוטה לארוכה באופן בלתי נסבל (לבני אדם, לפחות), ולכן "קפיצות" נעשות כל הזמן.

השורה הבאה בהוכחה בעברית למעלה מכילה חישוב, המתבסס על תכונות של =, ≤, + וערך מוחלט (כמו למשל: $\forall x \forall y. |x + y| \leq |x| + |y|$). לא נפרט אותו כאן, כי שלב זה בהוכחה אינו עושה בעיות בהבנה. נציין רק, שגם בשלב זה נעשה, כמובן, שימוש בכללים לוגיים, בעיקר בכלל (14) (איפה?). המסקנה הסופית מחישוב זה היא, על כל פנים:

$$\text{(V)} \qquad |(\pi + \sqrt{2}\,) - (a_1 + a_2)| \leq \varepsilon$$

מזה ומהמסקנה $\text{Rational}\ (a_1 + a_2)$ של השלב הקודם, אנו מקבלים, לפי כלל (3):

$$\text{Rational}\ (a_1 + a_2) \wedge |(\pi + \sqrt{2}\,) - (a_1 + a_2)| < \varepsilon$$

מעובדה זו אנו מסיקים, בעזרת כלל (15) (כלל ההכנסה של ∃):

$$\text{(VI)} \qquad \exists a(\text{Rational}\ (a) \wedge |(\pi + \sqrt{2}\,) - a| < \varepsilon)$$

השימוש בכלל (15) נעשה עם המשתנה a במקום המשתנה x, ועם $t = a_1 + a_2$. המלים "$a_1 + a_2$ הוא מספר כמבוקש" מציינות שזהו אכן t, ושאכן נעשה פה שימוש בכלל (15).

ההוכחה בעברית נסתיימה בשלב זה. למעשה הוכח עד כה רק ש- (VI) נובע מ- (6)-(1). נזכיר לקוראים, שעתה באים למעשה שני שימושים בכלל (16), בעזרתם מקבלים, ש- (VI) נובע בעצם מ- (4)-(1) בלבד. לבסוף באים שימוש בכלל (1) ואחר-כך שימוש בכלל (13). רק אז מקבלים, שמה שרצינו להוכיח, נובע אכן מהנתונים (3)-(1).

%%

א.5. על השימוש במשתנים במתמטיקה

בכל שפה יש מספר קטגוריות דקדוקיות. בשפה העברית, למשל, יש קטגוריות כמו "פועל", "שם עצם", "תואר השם", "משפט" ועוד. בשפה המתמטית מספר הקטגוריות הבסיסיות הוא 2: שמות עצם (או ביטויים – terms) ונוסחאות (או פסוקים, או טענות). דוגמה טובה לסוג הראשון הם ביטויים אלגבריים כמו $\frac{a}{a+2}$. משוואות וזהויות אלגבריות הן דוגמה טובה לסוג השני. בלא שנספק הגדרות מדויקות, ביטויים הם דבר לו אנו מייחסים ערך (value), בעוד נוסחאות הן דבר אותו אנו רואים כנכון או לא נכון. לדוגמה: ערך הביטוי $1+2$ הוא 3, $1<2$ היא נוסחה נכונה, ואילו $2=1$ היא נוסחה שקרית.[8]

להוציא מקרים פשוטים במיוחד, כמו הדוגמאות שהבאנו לפני רגע, הן ביטויים והן נוסחאות מכילים בדרך-כלל ***משתנים*** (variables). משתנים הם יצירים סינטקטיים בעלי שימוש רב הן במתמטיקה והן בשפות מחשב. בסעיף זה נדון לעומק בצורת השימוש במשתנים במתמטיקה.

נתחיל באבחנה יסודית בין שתי הצורות, שבהן יכול משתנה להופיע בביטוי או נוסחה מתמטיים: כמשתנה חופשי או כמשתנה קשור. כדי להבין למה הכוונה נפתח בדוגמאות.

נחזור לדוגמה של הביטוי $\frac{a}{a+2}$. זהו ביטוי, ולכן אמור להיות לו ערך. אבל מהו ערך זה? אין לכך, כמובן, תשובה מוגדרת. הדבר תלוי בערכו של המשתנה a. כאשר $a=1$, ערך הביטוי הוא $\frac{1}{3}$. כש- $a=0$, ערכו הוא 0. המשתנה משמש כאן לא לצורך יצירת ביטוי בעל ערך קונקרטי, אלא לצורך יצירת **תבנית** של ביטויים בעלי ערך קונקרטי. ביטויים כאלה מתקבלים, כאשר מציבים ערכים קונקרטיים במקום המשתנה a. כאשר משתמשים במשתנה בצורה כזו, דהיינו: לצורך יצירת תבניות של ביטויים או תבניות של נוסחאות, אנו קוראים לו משתנה ***חופשי*** (בביטוי או בנוסחה) או ***פרמטר***.

---

[8] יש לשים לב היטב, שמובן המונח "נוסחה" כאן הוא רחב בהרבה ממה שהקוראים רגילים לו!

הבא נשווה עתה את השימוש ב- a בביטוי $\frac{a}{a+2}$ לשימוש ב- x בביטוי $\int_0^1 x^2dx$. הביטוי השני מכיל משתנה (x), ובכל זאת יש לו ערך קונקרטי ($\frac{1}{3}$ במקרה זה). אין כאן צורך להציב ערכים במקום x. למעלה מזאת: אי אפשר כלל להציב ערכים במקום x! אם, למשל, נציב 2 במקום x, נקבל את $\int_0^1 2^2d2$, וזהו צירוף סימנים חסר כל מובן. ברור אפוא, ש- x משמש כאן לצורך שונה מזה שבמקרים הקודמים. מבלי לנסות להגדיר זאת במדויק, נאמר, שלפנינו שימוש ב- x כמשתנה *קשור*. סימן מובהק להיות משתנה קשור הוא, שאין מובן להצבת ערכים קונקרטיים במקומו.

נעבור לדוגמה נוספת. בנוסחה $x^2 = x$ x הוא משתנה חופשי. אם נציב במקום x 1, נקבל טענה נכונה, ואם נציב במקומו 2, נקבל טענה לא נכונה. לעומת זאת, ב- $\forall x(x^2 = x)$ וב- $\exists x(x^2 = x)$ x הוא משתנה קשור. לשתי הנוסחאות יש ערך אמת ברור במספרים הטבעיים (הראשונה שקרית, השנייה אמיתית). ערך זה אינו תלוי בשום הצבה עבור המשתנה x. נהפוך הוא. ניסיון להציב 7, למשל, במקום x ייתן את $\forall 7(7^2 = 7)$ ו- $\exists 7(7^2 = 7)$: שתי מחרוזות של סימנים, שהן חסרות מובן ולא דקדוקיות!

דוגמה שלישית: נתבונן בנוסחה $\forall x(x \geq y)$. מופיעים כאן שני משתנים: x ו- y. y הוא משתנה חופשי. בגלל נוכחותו אין הנוסחה מביעה טענה בעלת ערך-אמת מוגדר. נוכל אבל להציב במקום y 2 ולקבל את הטענה השקרית $\forall x(x \geq 2)$. נוכל גם להציב במקום y 0 ולקבל את הטענה $\forall x(x \geq 0)$. טענה זו היא נכונה בתחום המספרים הטבעיים, ושקרית בתחום המספרים הממשיים. המשתנה x, לעומת זאת, הוא קשור כאן, ואין לערכו שום קשר לנכונות או אי-נכונות הנוסחה. הצבת 2 במקומו תיתן $\forall 2(2 \geq y)$, וזוהי מחרוזת סימנים חסרת-שחר (בלא כל קשר לתחום).

מהו הדבר ההופך משתנה חופשי למשתנה קשור? התשובה היא: הכנסתו לתוך הטווח (scope) של מה שנקרא ***אופרטור קשירה*** (binding operator). למושג זה לא ניתן כאן הגדרה מדויקת. בסופו של דבר, אופרטור קושר משתנים אם הוא מוכרז בתור שכזה. טבלה מס' א.5 כוללת דוגמאות חשובות לאופרטורי קשירה במתמטיקה (ובשפות תכנות). אנו נסקור את מרבית הדוגמאות, ונעמוד על מספר מאפיינים המשותפים להם (שני האופרטורים האחרונים בטבלה הם חשובים במיוחד, אך יילמדו רק בהמשך הקורס). זה יספיק לצרכינו. בכל הדוגמאות כולל תיאור אופרטור הקשירה את שלושת המרכיבים הבאים:

(א) סימבול מיוחד המשמש כשם האופרטור.

(ב) אמצעי לציון אילו משתנים האופרטור קושר בכל מקרה של שימוש בו.

(ג) אמצעי לציון הטווח של האופרטור, דהיינו: התחום שבו הוא קושר את המופעים החופשיים (occurrence) של המשתנה הנקשר (משפט זה יובהר בהמשך).

טבלה א.5: דוגמאות לאופרטורים קושרים

	אופרטור	דוגמה
(1	$\forall x(\ldots)$ $\quad$ $\exists x(\ldots)$	$\forall x((x+1)^2 > x)$ $\quad$ $\exists x((x+1)^2 > x)$
(2	$\int(\ldots)dx$	$\int_0^1 (x^2 + x)dx$
(3	$\sum_{j=\ldots}(\quad)$	$\sum_{j=1}^{10} (j^2 + j)$
(4	$\lim_{y\to\ldots}(\quad)$	$\lim_{y\to 0}(2^y - 1)$
(5	**function** ______ (z: real): real; **begin** ... **end**	**function** f(x: real): real; **begin** $f := \mathrm{sqr}(x+1)$ **end**
(6	$\mu k.\ \ldots$	$\mu k.\exists i(k = 3 \cdot i) \wedge \exists j(k = 2j)$
(7	$\iota x.\ \ldots$	$\iota x.\, x > 0 \wedge (x+1)^2 = 4$
(8	$\{x \mid \ldots\}$	$\{x \mid (x+1)^2 > x\}$
(9	$\lambda x.\ \ldots$	$\lambda x.\ (x+1)^2$

נעבור לפירוט הדוגמאות.

1. בלוגיקה, הכמתים (שסימוניהם, כזכור, $\forall$, $\exists$) הם אופרטורי קשירה. הם קושרים את המשתנה הנכתב מיד אחריהם, בעוד טווח הקשירה הוא התחום בתוך הסוגריים, הבאים מיד אחר-כך. הבה נתבונן, למשל, בנוסחה הבאה:

$$\forall y[(\exists x(y^2 = x)) \vee x \cdot y = 0] \qquad (*)$$

ב- (*) יש שלושה מופעים של המשתנה y. כולם הינם קשורים על-ידי הכמת האוניברסלי $\forall$, שמופיע בהתחלה. העובדה ש- $\forall$ זה קושר דווקא את y, נקבעת על-ידי זה, ש- y הוא המשתנה המופיע מיד אחריו. טווח הקשירה של $\forall$ זה הוא מה שמצוי בתוך הסוגריים המרובעות, דהיינו: הנוסחה $\exists x(y^2 = x) \vee x \cdot y = 0$. בנוסחה זו, ***כשלעצמה*** (כאשר מנתקים אותה מהקונטקסט (*), בו היא מופיעה כאן) יש ל- y שני מופעים חופשיים. בנוסחה (*) המלאה, שני מופעים חופשיים אלה נקשרים על-ידי $\forall y$. בנוסחה (*) מופיע גם הכמת $\exists$. המשתנה, שהוא קושר בה, הוא x. טווח הקשירה שלו הוא הנוסחה $y^2 = x$, הנמצאת בסוגריים שאחרי $\exists x$. לכן המופע השני של x ב- (*) (זה שאחרי סימן השוויון) הינו קשור. לעומת זאת, המופע השלישי והאחרון של x ב- (*) (זה שב- $x \cdot y = 0$) נמצא מחוץ לטווח הקשירה של $\exists x$, ולכן הינו ***חופשי***. נוכל להציב במקומו 0 ולקבל את הפסוק הנכון $\forall y[(\exists x(y^2 = x) \vee 0 \cdot y = 0]$. נוכל גם להציב במקומו את 1 ולקבל את הפסוק השקרי (בממשיים) $\forall y[(\exists x(x^2 = y) \vee 1 \cdot y = 0]$ (הערה: ***"פסוק"*** הוא שם מקובל בלוגיקה לנוסחה, שאין בה משתנים חופשיים. לפסוק חייב להיות ערך אמת מוגדר: אמת או שקר, בהתאם לתחום בו מדובר).

2. הדוגמה המפורשת הראשונה של אופרטור קשירה, שסטודנטים נתקלים בה בחייהם, היא בדרך-כלל אופרטור האינטגרציה. הסימן המקובל הוא, כידוע: $\int$. את המשתנה הנקשר כותבים דווקא בסוף הביטוי, אחרי האות d, ואילו טווח הקשירה הוא כל מה שנמצא בין סימן האינטגרל $\int$ ובין אותו d. כך, למשל, בביטוי $\int_0^1 (ax^2 + 2x)dx$ המשתנה x הינו קשור בכל מקום בו הוא מופיע (כפי שמלמד ה- "dx"), בעוד a הינו פרמטר, דהיינו משתנה חופשי.
אופרטור האינטגרציה הינו אופרטור מסובך למדי מבחינה תחבירית, כי הוא קושר באופן חלקי. כאשר הוא קושר משתנה x, הוא קושר את המופעים שלו בטווח שציינו (בין ה- $\int$ וה- dx), אך לא שום דבר המופיע בגבול העליון או בגבול התחתון של סימן האינטגרל. כך בביטוי $\int_0^y xdx$ y הינו משתנה חופשי. למעלה מזאת: גם

בביטוי $\int_0^x xdx$ המופע של x, הנמצא מעל סימן האינטגרל, הינו חופשי, ואין כל קשר בינו ובין המופעים של x הנמצאים בטווח הקשירה. בביטוי $\int_0^x xdx$ אפשר להציב $x = 1$, למשל, והתוצאה תהיה $\int_0^1 xdx$ (ולא $\int_0^1 1d1$, שהוא קשקוש).

3. אופרטור הסכום Σ (ואופרטור המכפלה $\prod$) גם הם אופרטורי קשירה. במקרה זה מצוין המשתנה הנקשר משמאלו של סימן השוויון המופיע מתחת לסימן Σ. טווח הקשירה הוא האזור שמימין לסימן Σ (כשלעתים משתמשים בסוגריים כדי לסמן היכן הוא מסתיים). כך, למשל, בביטויים $\sum_{i=k}^{n} ni^2$ ו- $\sum_{i=k}^{n} (ni^2 + k)$ i הינו משתנה קשור, בעוד k ו- n הינם משתנים חופשיים. ערך הביטוי הראשון כש- $k = 1$ ו- $n = 3$, הינו $\sum_{i=1}^{3} 3i^2$ (כלומר $3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 = 42$). אין, לעומת זאת, שום משמעות, כמובן, להציב כאן $i = 2$ (נאמר). ל"ביטוי" $\sum_{2=k}^{n} n \cdot 2^2$ אין כל משמעות!

4. בחשבון דיפרנציאלי יש שימוש רחב לאופרטור הגבול lim, שאף הוא אופרטור קשירה. המקום בו מצוין המשתנה הנקשר דומה כאן למקרה של Σ (אלא שבמקום סימן השוויון "=" משתמשים כאן ב- "$\to$"). כך גם מיקום טווח הקשירה. למשל: בביטוי $\lim_{n \to \infty} \frac{k}{n}$ n הינו קשור, בעוד k חופשי. בדומה, ב- $\lim_{x \to a} (x^2 - x)$ x הינו משתנה קשור, בעוד a חופשי (שוב, בביטוי השני אפשר להציב $a = 1$ ולקבל $\lim_{x \to 1} (x^2 - x)$, שזה 0, אך אי-אפשר להציב $x = 1$: אין משמעות ל- $\lim_{1 \to a} (1^2 - 1)$).

5. הדוגמה החמישית בטבלה א.5 היא דוגמה לאופרטור קשירה בשפת התכנות פסקל. המשתנה הנקשר מוצהר כאן בתוך סוגריים, המופיעים מיד אחרי השם הניתן לפונקציה המוגדרת, בעוד טווח הקשירה הוא מה שנמצא בין המלים "begin" ו- "end".

בטרם נמשיך בדוגמאות, הבה נהרהר רגע בשאלה, שדומני כי היא מתבקשת: האם באמת הכרחי הדבר, שיהיו כל-כך הרבה צורות שונות ומשונות על מנת לציין, מיהו

המשתנה הנקשר, ומהו טווח הקשירה? האם אין זה אפשרי ועדיף לעשות זאת בצורה אחידה ופשוטה, כמו במקרה של $\forall$ ו- $\exists$? התשובה היא, שזה בהחלט אפשרי ובהחלט עדיף. עם זאת, במקרה של דוגמאות 2-4 אנו כבולים עדיין למורשת היסטורית של סימונים, שנוצרה בתקופה, שבה נושא השימוש במשתנים בכלל (וקשירתם בפרט) היה מאוד לא ברור. מסורות, לרוע המזל, קשה מאוד (מאוד!) לשנות. אף-על-פי-כן, כבר כיום נהוג סימון אחיד באי-אלו מערכות ממוחשבות, שנועדו לבדיקה אוטומטית של הוכחות מתמטיות ואף לגילוין. ייתכן מאוד, שהשפעת המחשב תביא בסופו של דבר לשינוי גם כאן.

שתי הדוגמאות הבאות לאופרטורי קשירה אינן נמצאות כל-כך בשימוש במתמטיקה, אלא בלוגיקה מתקדמת ובמדעי המחשב התיאורטיים. הם הוכנסו לשימוש במאה העשרים, וצורת הסימון היא לכן מודרנית יותר:

6. בתחום תורת הפונקציות החשיבות (computable) מקובל השימוש באופרטור הקשירה μ ("מיו"). המשתנה הנקשר נכתב כאן (כמו במקרה של $\forall$ ו- $\exists$) מיד אחרי האופרטור. טווח הקשירה נכתב או בסוגריים מיד אחר-כך, או מתחיל בנקודה הנכתבת מיד לאחר ציון המשתנה הנקשר, ונגמר או בסוף הטקסט, או באיזה סוגר ימני "(", שהסוגר השמאלי ")" המתאים לו נכתב עוד לפני ה- μ (כמו, למשל, בביטוי $7 \cdot (1 + \mu n.\underline{n \geq n^2})$. טווח הקשירה כאן הוא הנוסחה $n \geq n^2$).
משמעות הביטוי $\mu n.$____ היא: "ה- n הטבעי הראשון כך ש- ______". למשל: הביטוי $\mu k.\exists a(k = 3 \cdot a) \wedge \exists b(k = 2 \cdot b)$ מציין את המספר הטבעי הראשון, המתחלק גם ב- 3 וגם ב- 2, דהיינו: 6 (או 0, כאשר 0 נחשב למספר טבעי).
יש לציין, שלא תמיד לביטוי עם μ יש ערך, אפילו אם הוא תקין מבחינה דקדוקית. כך אין שום ערך לביטוי $\mu n.\, n > n + 1$. עניין זה אין בו כל חידוש, כמובן. גם הביטויים $\lim_{n \to \infty} (-1)^n$ ו- $1/0$ הם כשרים מבחינה דקדוקית, אך אין להם ערך מוגדר.

7. סימון אחר, שנשתמש בו בהמשך (בצורה מוגבלת) ואינו מוכר למרבית המתמטיקאים, הוא האופרטור ι ("איוטה"), המקביל להא-הידוע בעברית. הכללים כאן עבור ציון המשתנה הנקשר וטווח הקשירה זהים לאלה של μ. המשמעות אבל שונה: $\iota x.$___ מציין את ה- x היחיד, שיש לו התכונה ______.
למשל: ערך הביטוי $\iota x.\, 2x + 1 = 7$ הוא 3. כמו כן, $(\iota x.\, x < 0 \wedge x^2 = 1) = -1$, כיוון ש- -1 הוא המספר היחיד, שהוא גם שלילי וגם ריבועו הוא 1. ברור שהביטוי $\iota x.$___ הוא בעל משמעות רק כש*יש* אכן x *יחיד* בעל התכונה ___.

כך הביטוי $\iota x.x^2 = -1$ אינו מוגדר בממשיים, כיוון שאין בכלל מספר ממשי שריבועו -1. אותו הביטוי עצמו אינו מוגדר גם במרוכבים, אבל מסיבה אחרת: שם יש שני מספרים, שריבועם -1. הדבר זהה לחלוטין לשימושה של הא-הידוע בעברית. לשם העצם "המלכה הנוכחית של אנגליה" יש ערך מוגדר בזמן כתיבת שורות אלו. לשמות העצם "המלכה הנוכחית של צרפת" ו"הרב הראשי של ישראל" אין, אך מסיבות שונות.

הערות

%%

א. כל הדוגמאות בטבלה הן של אופרטורי קשירה, הקושרים בדיוק משתנה אחד. אופרטורים הקושרים בבת-אחת יותר ממשתנה אחד נדירים יותר, אך קיימים. כך מקובל בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי מתקדם להשתמש באופרטור הגבול (lim) לצורך קשירת מספר משתנים בבת-אחת. במקרה של lim, למשל, מציין הביטוי $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$ "גבול כפול", וה- lim קושר פה בבת-אחת גם את x וגם את y. יש להבדיל בין ביטוי זה ובין הביטוי $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}$, שגם בו שני המשתנים קשורים, אך כל אחד מהם נקשר על-ידי אופרטור lim אחר. שני הביטויים שונים קודם כל מבחינה *דקדוקית*, ובמקרה פרטי זה גם בערכם (לראשון *אין* כאן, למעשה, ערך). אחת השאלות החשובות בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי מתקדם היא: מתי ערך ביטוי המוגדר בעזרת קשירה "מקבילה" שווה לערך הביטוי המוגדר על-ידי קשירה "סדרתית"[9] (כלומר, שהמשתנים נקשרים בו זה אחר זה, לא בבת-אחת). שאלה דומה מתעוררת בקשר לאופרטור של אינטגרל כפול: $\int\int$. אופרטור זה גם הוא קושר בבת-אחת שני משתנים, כמו בביטוי: $\int\int_{x^2+y^2\le 1} (x+2y)dxdy$. כל זאת שייך אבל לקורס שני בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי. בקורס *הנוכחי* נשתמש מדי פעם באופרטורים של דוגמאות 8, 9 לצורך קשירת מספר משתנים בבת-אחת, אולם עד שנגיע לזה – עוד חזון למועד.

%%

ב. השימוש באופרטורים השונים כרוך בכללים תחביריים נוספים פרט לאלה שציינו. במיוחד חשוב לשים לב ל"קלט" ול"פלט" המצופים כאן. כך לגבי $\forall$ ו- $\exists$ חייבים אנו להציב *נוסחאות* בטווח שלהם, ומה שנקבל יהיה אף הוא נוסחה. אם ננסה להציב ביטוי בטווח של $\forall$ ו- $\exists$ נקבל משהו, שאינו תקין מבחינה תחבירית.

[9] הטרמינולוגיה שאולה כאן ממדעי המחשב.

בדוגמאות 2-4 יש להציב ***ביטויים*** בטווח והתוצאה תהיה אף היא ***ביטוי***. הפרת כללים אלה תיצור דברים חסרי שחר מבחינה תחבירית.

ג. כמו שראינו בדוגמאות השונות, מה שאופרטורי הקשירה קושרים אינו בעצם משתנים, אלא ***מופעים*** של משתנים. אותו משתנה עצמו יכול לכן להופיע בנוסחה או בביטוי מסוימים הן כמשתנה חופשי והן כמשתנה קשור (במקומות שונים, כמובן). יתר על כן, מופעים שונים של אותו משתנה יכולים להיקשר על-ידי אופרטורים שונים, כמו בדוגמה הבאה: $\forall x(x^2 \geq 0) \vee \forall x(x^2 < 0)$. שני המופעים הראשונים של x נקשרים על-ידי ה- $\forall$ הראשון, שני המופעים האחרונים על-ידי ה- $\forall$ השני. אין כל קשר לכן בין שני המופעים הראשונים ובין שני המופעים האחרונים. מכל בחינה פרקטית מדובר במופעים של משתנים שונים. בדומה, אין כל קשר בין מופעים חופשיים ומופעים קשורים של אותו משתנה. כבר ראינו, שהצבת $x = 2$ בביטוי כמו $\int_0^x x^2dx$ נותנת $\int_0^2 x^2dx$ $(= 8/3)$ ולא $\int_0^2 2^2d2$. כלומר, אין כל קשר בין ה- x-ים בטווח הקשירה ובין ה- x-ים בגבול העליון (או התחתון) של האינטגרל.

ד. מה שאופרטור קשירה קושר אינו כל המופעים של המשתנה הנקשר הנמצאים בטווח הקשירה, אלא רק אותם מופעים, שהם עדיין חופשיים שם. לדוגמה, נניח שלנוסחה (*) למעלה (בדוגמה של $\forall$ ו- $\exists$) נוסיף $\exists x$ בהתחלה. נקבל:

$$\exists x\{\forall y[(\exists x(y^2 = x)) \vee x \cdot y = 0]\} \qquad (**)$$

טווח הקשירה של ה- $\exists x$ החדש הוא מה שנמצא בסוגריים המסולסלים, כלומר הנוסחה (*) המקורית. הוא קושר שם אבל רק את המופע האחרון של x (זה שב- $(xy = 0)$. מופע זה, כזכור, הינו חופשי ב- (*) (אבל ב- (**) הוא קשור, כמובן). לעומת זאת, המופעים האחרים של x בתוך הסוגריים המסולסלות הינם קשורים כבר על-ידי ה- $\exists x$ הפנימי, ואי-אפשר לקשור אותם מחדש!

ה. קורה לא פעם, שמסיבות של נוחיות (או מסיבות היסטוריות) נחשבים מופעים של משתנים בקונטקסט מסוים לקשורים, למרות ששום אופרטור קשירה מפורש לא נראה בשטח. אופרטור קשירה, שמושמט לעתים קרובות מאוד, הוא האופרטור λ, עליו נלמד בהמשך. עוד יותר נפוצה השמטתו של הכמת $\forall$, כאשר הוא מופיע בראשית נוסחה. ודאי זכורה לקוראים ההבדלה, הנעשית בבית-הספר

התיכון, בין "זהויות" ובין שוויונות סתם, וחשיבות הבדלה זו: הטיפול הלוגי הוא שונה מאוד כאשר מדובר ב"זהות". עם זאת, אין בבית-הספר התיכון כל הבדל בין הצורה, שבה נכתבת "זהות", ובין הצורה שבה נכתב שוויון סתם. האמת היא אבל, ש"זהות" אינה אלא נוסחה עם כמתים אוניברסליים בהתחלה, שפשוט לא טורחים לכתוב אותם. כאשר אנו אומרים, למשל, שהנוסחה $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ הינה זהות, כוונתנו היא, בעצם, שהנוסחה הבאה היא נכונה:

$$\forall a \forall b . (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

בדומה, כשאנו מוצאים בספרי לימוד את המשפטים הבאים:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\int_0^x x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \qquad (a \neq -1)$$

הכוונה היא, בעצם, לטענות הבאות:

$$\forall n \,.\, 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\forall x \forall a \left(a \neq -1 \Rightarrow \int_0^x x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \right)$$

(כדאי לשים לב לכך, שבדוגמה האחרונה יש מופעים של x הנקשרים על-ידי $\forall x$, בעוד מופעים אחרים נקשרים על-ידי $\int \ldots dx$).

אחת הדרכים להיווכח, שבזהות כל המשתנים הינם קשורים, הינה, שעל זהות אנו שואלים אם היא נכונה או לא נכונה באופן אבסולוטי, ללא תלות בערכם של המשתנים החופשיים, שכביכול נמצאים בה. בדומה, אנו אומרים לעתים קרובות, שאין זה נכון ש- $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. זאת, למרות שיש הצבות (כש- $a = 0$, למשל), שבהן נקבל מנוסחה זו עובדות נכונות דווקא. מה שמתכוון מי שטוען טענה זו הוא, כמובן, שהנוסחה $\forall a \forall b . (a+b)^2 = a^2 + b^2$ אינה נכונה.

זיהוי העובדה, שמשתנים מסוימים הם בעצם קשורים, ומי (והיכן) הוא האופרטור הקושר אותם, הוא חשוב ביותר, ובמיוחד כשאופרטור זה מושמט. זאת, כיוון שהטיפול בהם נעשה כאילו האופרטור היה כתוב במפורש!

הקדשנו דיון ארוך מאוד להבחנה בין משתנים קשורים וחופשיים – דיון שעלול להיראות בקריאה ראשונה מסובך למדי. מן הסתם, התגנבה בשלב כלשהו ללב הקוראים התהייה: בשביל מה כל זה? התשובה היא, שהטיפול הלוגי בשני סוגי המשתנים הינו שונה לחלוטין. למעשה, מקור מרבית אי ההבנות, הטעויות והבלבול, שיש לסטודנטים בתחומים רבים של המתמטיקה, הוא באי הבחנה, באיזו צורה משתנים מתפקדים בקונטקסט מסוים. כדי שהדיון שעשינו יוכל לעזור לנו להימנע מטעויות כאלה בעתיד, עלינו להכיר את הכללים הלוגיים העיקריים הקשורים למשתנים. זו תהיה מטרתנו הבאה.

כלל α

כבר ציינו מספר פעמים, שאי אפשר להחליף משתנים הקשורים בקונטקסט מסוים בערכים קונקרטיים ולקבל משהו בעל משמעות (אלא אם כן נעשה שינוי גם בקונטקסט – דוגמה חשובה במיוחד לכך נראה בהמשך). בדומה, אין גם כל מובן להצבת ביטוי מורכב במקום משתנה קשור.[10] כך אין כל משמעות למחרוזת הסימנים: $\forall(x+1).\ x+1 \geq y$, המתקבלת על-ידי הצבת $x+1$ במקום z ב- $\forall z.\ z \geq y$ (יש אבל, כמובן, בהחלט מובן להצבת $x+1$ במקום y בנוסחה זו, כיוון ש- y חופשי בה). עם זאת, יש סוג אחד של הצבה, שאפשר לעשות במקום משתנים קשורים, והתוצאה לא זו בלבד שהיא בעלת מובן, אלא שמובן זה *זהה* למובן של הביטוי או הנוסחה המקוריים (למעט מקרים יוצאים מן הכלל, אותם נפרט בהמשך). הכוונה היא להחלפתו של משתנה קשור אחד במשתנה אחר. ליתר דיוק: אפשר להחליף את המשתנה הנקשר על-ידי אופרטור קשירה מסוים (ביחד עם כל המופעים של אותו משתנה, הנקשרים על-ידי אותו אופרטור) במשתנה אחר. אפשרות זו ידועה בשם כלל (α). הפעלת כלל α על ביטוי תיתן ביטוי השווה לביטוי המקורי (עבור כל ערך של המשתנים החופשיים שלו). הפעלת כלל α על נוסחה תיתן נוסחה השקולה לוגית לנוסחה המקורית.

דוגמאות:

$\forall x.\ x=x$ **שקול לוגית ל-** $\forall y.\ y=y$.

$\forall x \exists y.\ x>y$ **שקול לוגית ל-** $\forall x \exists a.\ x>a$ **ול-** $\forall b \exists a.\ b>a$

$$\int_0^a x^2 dx = \int_0^a y^2 dy$$

[10] בכל המקומות המעטים בטקסטים, בהם כביכול נעשה הדבר, אין הכתוב אלא צורת כתיבה וולגרית מקוצרת למשהו, שבעצם היה צריך להיכתב אחרת.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

וכן הלאה.

עם זאת, יש צורך, כפי שרמזנו, בזהירות מסוימת פה. לא נוכל להחליף משתנה קשור מסוים *בכל* משתנה אחר. כך, למשל, בביטוי $\int_0^1 yxdx$ לא נוכל להחליף את המשתנה הקשור x במשתנה y. אם נעשה זאת נקבל $\int_0^1 y^2dy$, שזהו משהו שונה לחלוטין. למעלה ראינו גם, שבנוסחה $\exists i\exists j.i+j=3$ לא נוכל להחליף את j ב- i (או להיפך).

התנאים המדויקים לתקפות כלל α הם כדלקמן: ניתן להחליף את המשתנה x, הנקשר על-ידי אופרטור מסוים, במשתנה אחר y, אם מתקיימים *שני* התנאים הבאים:

(1) y אינו מופיע חופשי בטווח של האופרטור בו מדובר.
(2) בשום מקום בטווח הנ"ל אין x מופיע חופשי בטווח של אופרטור, הקושר את y.

לדוגמה, בביטוי $\int_0^1 yxdx$ לא נוכל להחליף את המשתנה הקשור x במשתנה y, כיוון שתנאי (1) יופר אז (y מופיע חופשי בטווח הקשירה של x). לעומת זאת, בנוסחה $\exists i\exists j.i+j=3$ לא נוכח להחליף את המשתנה הקשור i במשתנה j, כיוון שאז יופר תנאי (2): בטווח הקשירה של $\exists i$ (הנוסחה $\exists j.i+j=3$) יש ל- i מופע חופשי בתוך הטווח של $\exists j$, שהוא אופרטור הקושר את j.

התנאים (1) ו- (2) קשים מעט לזיכרון. מומלץ לכן להפעיל את כלל α באופן הפשוט הבא: כדאי להחליף (כשמתעורר הצורך) משתנה קשור x במשתנה y, שאינו מופיע *בכלל* בטווח הקשירה של x. דהיינו, כדאי ש- y יהיה משתנה חדש וטרי מהתנור. זה מבטיח את קיום התנאים (1) ו- (2), קל לזיכרון, ומספיק לכל הצרכים המעשיים.

הערות:

(א) כדי למנוע כל אי-הבנה, נציין שיש לנו מאגר בלתי נדלה של משתנים, שנוכל להשתמש בהם, לא רק 52 האותיות של הא"ב הלטיני. מתמטיקאים נוהגים להשתמש בעיקר באותיות לטיניות ויווניות (כמו α, β, ε, δ), בלי או עם

אינדקסים: x, x_1, y_{27}, α_{101}. לפעמים הם גם מעטרים את המשתנים בתגים וכוכבים למיניהם: z^*, x''. בשפות תכנות מקובלת בדרך-כלל כמשתנה כל מחרוזת של סימנים, המתחילה באות לטינית. למשל: המחרוזת

this_is_a_very_long_variable

היא דוגמה למשתנה ארוך.

(ב) בכלל α נוהגים להשתמש כשיש עודף של שימוש במשתנה מסוים, העלול לגרום לטעויות. כך, למשל, נוהגים לעתים קרובות בראשית לימוד האינטגרלים להיעזר בכלל α ולכתוב $\int_0^x t^2dt$ במקום $\int_0^x x^2dx$ (החלפת המשתנה ***הקשור*** x במשתנה t).

אין, לפי כלל α, כל הבדל בין שני הביטויים (פרט להבדל פסיכולוגי), ומאוחר יותר לא טורחים לעשות שינוי זה (עם זאת, קשה להגיד, שמתמטיקאים הינם עקביים בנקודה זאת. בעוד כתיבת ביטוי כמו $\int_0^x x^2dx$ היא דבר מקובל מאוד, לא תמצאו בשום ספר לימוד ביטוי כמו: $\sum_{i=0}^{i} i^2$, למרות שגם כאן אין שום קשר בין ה- i למעלה, שהוא חופשי, ובין שאר ה- i-ים. למעשה, אפילו בביטוי $\sum_{i=i}^{3} i^2$ אין שום קשר בין שני ה- i-ים הכתובים ב"שוויון" $i = i$ למטה. הסימן "=" כלל אינו מביע שוויון כאן, אלא רק מפריד בין ה- i משמאל, שהוא קשור, וה- i מימין, שהוא חופשי. ערך הביטוי $\sum_{i=i}^{3} i^2$, כש- $i = 1$, הוא $\sum_{i=1}^{3} i^2$ (כלומר: $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$).

אין כל הבדל עקרוני בין ביטוי כמו $\sum_{i=i}^{3} i^2$ ובין ביטוי כמו $\int_x^3 x^2dx$. בכל זאת, בביטוי הראשון שום מתמטיקאי אינו משתמש, בעוד בשני – כל מתמטיקאי משתמש. למה? ככה!).

בדומה, מקובל לעתים בבית-הספר התיכון (בעיקר ברמת "3 נקודות"), בתרגילים המתבססים על זהויות כמו $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, להשתמש בכלל α ולעבור לשימוש בזהות $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ (שזו אותה זהות, כמובן). זה קורה כשהמטלה היא לפשט ביטויים המכילים את a או b כמו $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$. המטרה של המורה העושה זאת היא, שוב, מניעת בלבול (כזכור, בזהויות המשתנים הינם משתנים הקשורים על-ידי כמתי $\forall$ סמויים. לכן כלל α ישים).

ברמה של 5-4 נקודות משתמשים לעתים בכלל α בעת לימוד נושא האינדוקציה. כזכור, אקסיומת האינדוקציה, כאשר A היא נוסחה שבה n מופיע חופשי, הינה:

$$[A(0/n) \wedge \forall n(A \Rightarrow A(n+1/n))] \Rightarrow \forall nA$$

באקסיומה זו נקשר המשתנה n במקומות שונים על-ידי אופרטורי $\forall$ שונים. כדי למנוע בלבול, ספרי לימוד רבים משתמשים לכן בכלל α ומנסחים (למעשה) את האקסיומה כך: $[A(0/n) \wedge \forall k(A(k/n) \Rightarrow A(k+1/n))] \Rightarrow \forall nA$. זה מתבטא בכך, שבשלב "המעבר" מניחים נכונות ל- "$n=k$" ומוכיחים ל- "$n=k+1$". מובן, שזה אפשרי רק כאשר התנאים לתקפות כלל α מתקיימים. אם, למשל, k מופיע כפרמטר ב- A, צריך (לפי שיטה זו) להשתמש במשתנה אחר.

(ג) תקפות כלל α יכולה לשמש כמבחן מועיל לזיהוי משתנים קשורים. "זהויות" הן דוגמה טובה לכך.

כללי הכמתים

הכללים בטבלה א.4 (עמ' 26), העוסקים בכמתים (כללים 13-16), הם המקום העיקרי בו האבחנה בין משתנים קשורים וחופשיים היא קריטית. אם נתבונן בכללים אלו נראה, שליד המספרים (13, 14 וכו') מופיעות כוכביות. כוכביות אלו באות לציין, שיש הגבלות על השימוש בכללים אלה. ההגבלה החשובה ביותר היא זו על כלל 14. כלל זה הוא פשוט ביותר, ואנו משתמשים בו בלי הרף מאז הבנו את המלה "כל". הכלל קובע, כזכור, שאם לכל העצמים בתחום מסוים יש תכונה מסוימת, אז אם ניקח עצם מסוים בתחום, מובטח לנו, שתהיה לו תכונה מסוימת זו. פורמלית הכלל אומר, שאם הסקנו את $\forall xA$ בצורה כלשהי מקבוצת הנחות **T**, אז נוכל להסיק מאותה קבוצה (כמעט) כל נוסחה מהצורה $A(t/x)$, דהיינו (כמעט) כל נוסחה המתקבלת מהצבת הביטוי t במקום המופעים החופשיים של x ב- A (ב- $\forall xA$ אין, כמובן, ל- x מופעים חופשיים, אך ב- A עצמה קרוב לוודאי שיש לו). למשל, אם הגננת מודיעה, ש"כל ילד חייב לשטוף ידיים לפני הארוחה" (המלה "ילד" מתפקדת כמשתנה במשפט זה!), אזי מסיק אורי הקטן, ש"אורי חייב לשטוף ידיים לפני הארוחה", למרות שהגננת לא אמרה זאת במפורש. אורי נעזר, בלי דעת, בכלל 14, כאשר x, במקרה זה, הוא "ילד" ואילו t – השם "אורי".

דוגמאות נוספות: מהנוסחה $\forall x\exists y.\, x<y$ ניתן להסיק ש- $\exists y.\, 3<y$ (הצבת $t=3$ במקום x). וכן גם $\exists y.\,(x+z)+1<y$ (הצבת $t=(x+z)+1$ במקום x).
בדומה, מהזהות הידועה $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ נובעת, לפי כלל 14, הזהות $1+2+\ldots+(m^2-1)=\dfrac{(m^2-1)m^2}{2}$, על-ידי ההצבה $t=m^2-1$ במקום n (n, כזכור, קשור כאן על-ידי כמת $\forall n$ סמוי הנמצא בהתחלה. לכן כלל 14 ישים. העובדה, שמה שמתקבל הוא זהות גם כן, דהיינו: אפשר להוסיף לו $\forall m$ בהתחלה, נובעת מכלל 13).

יש אבל, כמו שרמזנו, הגבלה חשובה ביותר על הביטוי t, שאפשר להציב במקום x בכלל 14, ***ויש לזכור אותה תמיד כדי להימנע משטויות***: ניסוחה הטכני הוא, ש- t חייב להיות ***חופשי להצבה*** ב- A במקום x. פירוש הדבר הוא, ששום מופע חופשי ב- t של משתנה אסור לו שיהפוך לקשור בעקבות ההצבה!!

דוגמאות:

1. מ- $\forall x\exists y.\, x<y$ (פסוק נכון במספרים הממשיים) אי אפשר, למרבה המזל, להסיק ש- $\exists y.\, y+1<y$ (מה שהיינו מקבלים מכלל 14, לו $t=y+1$ היה חופשי להצבה במקום x בנוסחה $\exists y.\, x<y$). הסיבה היא, שהביטוי $y+1$ מכיל את המשתנה y, שהינו חופשי בו, אך נקשר (על-ידי $\exists y$) בעקבות ההצבה.

2. מהזהות $\int_0^x ax^2dx=\dfrac{ax^3}{3}$ (דהיינו $\forall a\forall x\left[\int_0^x ax^2dx=\dfrac{ax^3}{3}\right]$) ***לא*** נובע (על-ידי הצבת $t=x$ במקום a), ש- $\forall x\left[\int_0^x x\cdot x^2dx=\dfrac{x\cdot x^3}{3}\right]$. האמת, כמובן, הינה, ש- $\forall x\left[\int_0^x x^3dx=\dfrac{x^4}{4}\right]$!

3. אחת הזהויות החשובות ביותר הקשורות בנגזרות הינה:

$$(x^a)'=ax^{a-1}$$

כמעט כל תלמיד תוהה, בשלב כלשהו, מדוע לא נוכל להציב בנוסחה זו x במקום a ולקבל ש- $(x^x)'=x\cdot x^{x-1}$ (דהיינו: $(x^x)'=x^x$). הרי הזהות הזו נכונה ***לכל*** a, לא? היא נכונה עבור $a=7$ ו- $a=-12$ ו- $a=\sqrt{2}$, לא? אז למה לא עבור $a=x$?? התשובה המעורפלת, שהתלמיד מקבל בדרך-כלל, היא, ש- a כאן הוא "קבוע".

הכיצד קבוע הוא, אם מותר להציב במקומו ערכים שונים, וזוהי אפילו עיקר השימושיות של הנוסחה? ובמה קבוע הוא כאן יותר מ- x ??

הבה ננתח מה *באמת* קורה כאן. ראשית, ה"זהות" הנ"ל הינה בעצם הטענה:

$$\forall a \forall x[(x^a)' = ax^{a-1}] \qquad (*)$$

כאשר $(x^a)'$ היא צורה מקוצרת לכתיבת $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^a - x^a}{h}$.

עתה, ההצבה $a = 7$, למשל, הנותנת $\forall x[(x^7)' = 7x^6]$ (ובקיצור יותר: הזהות $(x^7)' = 7x^6$), אינה אלא הפעלת כלל 14 על (*) עם $t = 7$ (ו- a במקום ה- x, שמופיע בניסוח הכלל). כלל 14 מאפשר אף להציב y ו- $y - 1$ במקום a כאן (ומשתמשים בזה ב"חדו"א II"). מה שכלל 14 *אינו* מאפשר כאן הוא הצבת x (או כל ביטוי אחר בו x הוא חופשי, כמו $x - 1$ או $\int_0^x x^2dx$) במקום a, כי ביטויים המכילים מופעים חופשיים של x אינם חופשיים להצבה במקום a בנוסחה $\forall x[(x^a)' = ax^{a-1}]$! זהו כל הסיפור כולו, ואין בו שום שוני ממה שקורה בשתי הדוגמאות הקודמות.

הערה:

פירשנו כאן את הזהות $(x^a)' = ax^{a-1}$ כמציינת שוויון בין שני *מספרים*. ערך שני מספרים אלו תלוי בערך המשתנים x ו- a. בפירוש זה אין כל הבדל *לוגי* בין תפקידי המשתנים x ו- a, פרט להסכם הג'נטלמני ש- $(x^a)'$ הוא קיצור של $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^a - x^a}{h}$ דווקא, ולא של $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^{a+h} - x^a}{h}$. דבר זה יתברר אם נכתוב את הזהות למעלה בצורתה המלאה:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^a - x^a}{h} = ax^{a-1}$$

ממש כשם שבזהות זו ניתן להציב במקום a כל ביטוי, שאינו מכיל מופע חופשי של x, ולקבל כך זהות חדשה, כך ניתן להציב בו במקום x כל ביטוי, שאינו מכיל מופע חופשי של a, ולקבל כך זהות חדשה! קיימת אבל אינטרפרטציה אחרת של הזהות $(x^a)' = ax^{a-1}$, לפיה זהות זו מביעה לא שוויון של מספרים, אלא שוויון של *פונקציות* (יש, כמובן, קשר הדוק בין שתי האינטרפרטציות). באינטרפרטציה זו נטפל בפרק ב.4, ובה יש אכן הבדל מסוים בתפקוד של x ושל a (אם כי עדיין שניהם יהיו קשורים). על כל פנים, בשתי האינטרפרטציות הצבת $a = 7$ או

$a = y + 1$ אפשרית לפי כלל 14, ואי האפשרות להציב x במקום a נובעת מה*הגבלה* על כלל זה.

4. דוגמה נוספת למצב נפוץ, בו נעשית קשירה של משתנים, ללא שהדבר נראה ישירות, היא בהגדרת פונקציות. כשכותבים משהו כמו: "נגדיר פונקציה f על-ידי הכלל $f(x) = x^2$", המשתנה x המופיע שם הינו קשור (תקפות כלל α היא מבחן מצוין לכך. אם נכתוב: "נגדיר פונקציה f על-ידי הכלל $f(z) = z^2$", הרי f ה"חדשה" תהיה בדיוק ה- f הקודמת!). למעשה, גם כאן יש להתייחס לכָּתוב כאילו המשתנה x נקשר על-ידי $\forall$. במלים אחרות, מה שכתוב הוא בעצם:

$$\forall x.\, f(x) = x^2$$

מזה נובע, לפי כלל 14, ש- $f(2) = 2^2$ ו- $f(a-1) = (a-1)^2$.
מובן, לאור זאת, שההגבלה על השימוש בכלל 14 תחול גם על המקרה של הגדרת פונקציות. כך, אם נגדיר פונקציה g על-ידי:

$$g(x) = \int_0^x xy^2dy \qquad (= \frac{x^4}{3})$$

אז

$$g(2) = \int_0^2 2y^2dy = \frac{16}{3}$$

ו-

$$g(x+z) = \int_0^{x+z} (x+z)\cdot y^2dy = \frac{(x+z)^4}{3}$$

בניגוד לכך, ***לא*** נוכל להציב בהגדרת g את הביטוי y (או $y-1$) במקום x, כי ביטויים אלו אינם חופשיים להצבה: יהיו מופעים של y (לא כולם!) שיקָשרו בעקבות ההצבה! אם נעשה הצבה אסורה זאת "נקבל":

$$g(y) = \int_0^y y\cdot y^2dy = \frac{y^4}{4}$$

בעוד שלאמיתו של דבר, $g(y) = \frac{y^4}{3}$! (כדי למצוא זאת מ*ההגדרה* של g עלינו להחליף תחילה, לפי כלל α, את המשתנה הקשור y שבהגדרת g במשתנה אחר, כמו z, ***ואז*** להציב y).

לסיכום, כמעט כל השגיאות הנעשות בעת הצבות (והן מרובות מאוד) קשורות בהפרת ההגבלה על כלל 14. חיוני אפוא, לפני שמבצעים הצבה, לבדוק היטב, מי הם המשתנים הקשורים ועל-ידי מה הם קשורים (כולל קשירה על-ידי אופרטורי קשירה סמויים – במיוחד $\forall$), ומי והיכן הם המשתנים החופשיים. בדיקה זו תאפשר לנו לוודא, שאכן הביטויים שאנו מציבים הינם אכן חופשיים להצבה במקומות, בהם אנו מציבים אותם.

%%

נפרט עתה, לצורך השלמות, את ההגבלות על שאר הכללים של הכמתים:

כלל 13: הכלל תקף בתנאי של- y אין מופע חופשי באף אחת מההנחות בקבוצת ההנחות, מהן הוסקה A (דהיינו: **T**). אם y איננו x עצמו, אז אסור גם שיהיה לו מופע חופשי ב- A.

כלל 15: אותה הגבלה כמו בכלל 14: t חייב להיות חופשי להצבה במקום x ב- A.

כלל 16: הכלל תקף בתנאי, שלמשתנה y אין שום מופע חופשי ב- **T** או ב- B. אם y איננו x עצמו, אז אסור גם שיהיה לו מופע חופשי ב- A.

%%