

מתמטיקה בדידה - תרגיל מס' 2

1. הצרן את הטענות הבאות:

- (א) אם יש פילים על הירח אז פילים אילו הם ירוקים.
- (ב) הכרחי להיות חזק כדי להיות טייס.
- (ג) כל סוס באורווה שזגבו לבן הוא בעל כתם על המצח.
- (ד) סוסים עם זנב לבן אינם מחבבים סוסים עם כתם על המצח.
- (ה) לאף סוס באורווה אין זנב לבן.
- (ו) באורווה יש לכל היותר שני סוסים שחורים.
- (ז) דרך נקודה שמחוץ לישר נתון עובר מקביל יחיד לאותו ישר.
- (ח) במשולש שווה צלעות, כל הזוויות שוות זו לזו.

2. בלא שימוש בסימן השלילה הצג נוסח מוצרן חלופי ל-:

$$\neg[\exists x \in \mathbb{Q}.\forall y \in \mathbb{Q}.\left((y^2 < 2 \rightarrow x > y) \wedge (\forall \epsilon > 0.\exists z \in \mathbb{Q}.\left(z^2 < 2 \wedge z > x - \epsilon\right))\right)]$$

\mathbb{Q} - קבוצת המספרים הרציונליים. האם זהו פסוק אמת?
אם כן - נמק בהרחבה. אם לא - תן דוגמא נגדית.

3. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? נמק.

- $(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$
- $(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$
- $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$
- $(\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$

4. נסח בעברית את הטענות המוצרנות על ידי הפסוקים הבאים. לגבי כל פסוק, קבע אם הוא אמת או שקר על ידי דוגמא נגדית או הסבר מדויק.

(א) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}.\left[\left((b \neq 0) \wedge (b^2 - 4ac \geq 0)\right) \rightarrow (\exists x \in \mathbb{R}.ax^2 + bx + c = 0)\right]$

(ב) $\exists x \in \mathbb{R}.\left[(x > 1) \rightarrow (\forall y \in \mathbb{R}.y > 100)\right]$

(ג) $(\exists x \in \mathbb{R}.x > 1) \rightarrow (\forall y \in \mathbb{R}.y > 100)$

(ד) $(\forall x \in \mathbb{R}.\exists y \in \mathbb{R}.x = y + 1) \wedge (\forall y \in \mathbb{R}.\exists x \in \mathbb{R}.y = x + 1)$

(ה) $\exists x \in \mathbb{R}.\left[(\exists y \in \mathbb{R}.x = (1 - y)^2) \wedge (\exists y \in \mathbb{R}.x = -y^2)\right]$

(ו) $\forall \epsilon \in \mathbb{R}.\left[(\epsilon > 0) \rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N}.\forall n \in \mathbb{N}.\left(n > n_0 \rightarrow \left(\frac{1}{n} < \epsilon\right)\right))\right]$

(ז) $\forall \epsilon \in \mathbb{R}.\left[(\epsilon > 0) \rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N}.\forall n \in \mathbb{N}.\left(n > n_0 \rightarrow \left(\left|\frac{1}{n} - 1\right| < \epsilon\right)\right))\right]$

5. בדקו האם המסקנה "יוסי יעזור למשה או שדני לא יעזור למשה" נובעת לוגית מההנחות הבאות: "יוסי יעזור למשה אם משה יבקש", "דני יעזור למשה אם משה יתחיל ללמוד", "משה יתחיל ללמוד".