מתמטיקה בדידה - תרגיל מס' 3

1. הוכח כי לכל זוג קבוצות A ו־B מתקיים $A = B$ אם ורק אם $A \triangle B = \emptyset$.
(רמז: הוכחה בדרך השלילה).

2. הוכח או הפרך:

   (א) $\{1, \{1\}\} \subseteq N \cup P(N)$

   (ב) $\{1, \{1\}\} \subseteq P(N) \cup P(P(N))$

   (ג) $\exists A \exists B \exists C.\ (P(A) \cup P(B)) \cap P(C) = A \cup (B \cap C)$

   (ד) $\forall A \forall B \forall C.\ A \triangle (B \cup C) = (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$

   (ה) $\forall A \forall B \forall C.\ A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

   (ו) $\forall A \forall B \forall C.\ A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

   (ז) $\forall A \forall B \forall C.\ (A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

3. $A = \{a, \emptyset, \{a\}\}$. רשום את $P(A) - P(P(A))$.

4. רשום את $A - B$ ואת $A \triangle B$ עבור:

   (א) $A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

   (ב) $A = \{2k \mid k \in N\}$, $B = \{2k - 1 \mid k \in N\}$

   (ג) $A = \{x \in R \mid 1 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x \in R \mid 3 < x < 5\}$

5. (א) מצא סדרת קבוצות $A_0, A_1, A_2, \ldots$ המקיימת לכל i:

$$(|A_i| = i) \wedge (A_i \subseteq A_{i+1}) \wedge (A_i \in A_{i+1})$$

   (ב) מצא דוגמא לקבוצה A כך שבקבוצה $A \cap P(A)$ יש איבר אחד, שני איברים, שלושה איברים.

6. הוכח או הפרך:

   (א) $\forall A \forall B.\ P(A \cap B) = P(A) \cup P(B)$

   (ב) $\forall A.\ P(A) \subseteq P(P(A))$

   (ג) $\exists A \in P(N \cup P(N)).\ |P(A) \cap P(P(A))| = 8$

   (ד) $\exists A \in P(N \cup P(N)).\ |P(A) \cap P(P(A))| = 7$

7. הוכח או הפרך:

   (א) $16 \in \{n \mid n \in N \wedge \exists k \in N. k^2 = n\}$

   (ב) $0 \in \{x \mid \forall y. y \in \{x \mid \exists z \in N. x^2 = z\} \rightarrow y \geq x\}$

8. הוכח או הפרך:

   (א) $\forall A \forall B. P(A \triangle B) = P(A) \cup P(B)$

   (ב) $\forall A \forall B. P(A - B) = P(A) - P(B)$